गणित

कक्षा VI के लिए पाठ्यपुस्तक

लेखक

आशा रानी सिंगल — श्रीजता दास
बी. देवकीनंदन — सुन्दर लाल
महेन्द्र शंकर — सुरजा कुमारी

संपादक

आशा रानी सिंगल
बी. देवकीनंदन
महेन्द्र शंकर

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
जून 2002 ज्येष्ठ 1924

प्रथम पुनर्मुद्रण
जनवरी 2003 पौष 1924

PD 50T MB

ISBN 81-7450-038-3

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैम्पस	108,100 फीट रोड, होस्डेकेरे	नवजीवन ट्रस्ट भवन	सी.डब्ल्यू.सी. कैम्पस
श्री अरविंद मार्ग	हेली एक्सटेंशन,	डाकघर नवजीवन	32,बी.टी. रोड, सुखचर
नई दिल्ली 110016	**बैंगलूर 560085**	बनाशंकरी III इस्टेज	**24 परगना 743179**
		अहमदाबाद 380014	

संपादन : मरियम बारा
उत्पादन : डी. साईं प्रसाद
सुबोध श्रीवास्तव
सज्जा : डी. के. शिंडे
आवरण : शशी भट्ट

रु : 30.00

एन. सी. ई. आर. टी. वाटर मार्क 70 जी एस एम पेपर पर मुद्रित

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग नई दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा टैन प्रिंटर (ई) प्रा० लि० 44 कि.मी. माईल्स स्टोन नेशनल हाईवे, रोहतक रोड, गाँव रोहड डिस्ट्रिक-झज्जर, हरियाणा द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.पी.ई.) 1986 में सामान्य शिक्षा के एक अभिन्न अंग के रूप में गणित के पठन-पाठन की आवश्यकता पर स्पष्ट रूप से बल दिया गया है। चूँकि पाठयचर्या नवीनीकरण एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए प्रौद्योगिकी उन्मुख समाज की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न प्रकार के परिवर्तन होते रहे हैं।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक में, जो राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986 में दर्शाई गई अपेक्षाओं की पूर्ति हेतु लिखी गई है, इस नीति के बाद की चर्चाओं को समावेशित करते हुए, गणित को विद्यार्थियों के आस-पास के परिवेश से संबंधित क्रियाकलापों और प्रेरक उदाहरणों द्वारा प्रस्तुत करने का प्रयत्न किया गया है।

बदलती हुई प्रवृत्तियों के आधार पर दक्षताओं एवं अभिवृत्तियों को विकसित कर ज्ञान प्रदान करने के लिए, पाठ्यपुस्तक में सम्मिलित विषयवस्तु और सुझाए गए क्रियाकलापों को संयोजित किया गया है। इसे अधिकांश रूप से दैनिक जीवन के लिए आवश्यक गणित के सारभूत तथ्यों के अध्ययन तक ही सीमित रखा गया है। पाठ्यसामग्री और सुझाए गए क्रियाकलापों को हमारे देश की व्यापक विद्यालयी पद्धतियों की विभिन्न आवश्यकताओं, पृष्ठभूमि और पर्यावरण के अनुकूल बनाने का एक सार्थक प्रयास किया गया है। विषयवस्तु को सरल भाषा में प्रस्तुत करने का विशेष ध्यान रखा गया है।

पाठ्यपुस्तक का प्रथम प्रारूप विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा विकसित किया गया है जिन्हें अध्यापन और अनुसंधान का व्यापक अनुभव प्राप्त था। तत्पश्चात् एक समीक्षा कार्यशाला में इस प्रारूप की विषयवस्तु एवं उसके प्रस्तुतिकरण की विधि को पढ़ाने वाले शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय-विशेषज्ञों द्वारा गहन रूप से समीक्षात्मक विवेचना की गई। समीक्षा कार्यशाला में प्राप्त टिप्पणियों और सुझावों पर लेखकों ने विचार किया और इस प्रारूप को उपयुक्त रूप से संशोधित कर अंतिम पाण्डुलिपि तैयार की गई। लेखक दल ने गणित की पूर्व पाठ्यपुस्तक के प्रयोक्ताओं से प्राप्त सुझावों एवं पुनर्निवेशन का उपयोग किया। प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में, जहाँ उपयुक्त समझा गया, लेखक दल ने पूर्व प्रकाशित पाठ्यपुस्तकों का भी प्रयोग किया।

इतने अल्प समय में इस पुस्तक को विकसित करने के लिए मैं लेखक दल के सदस्यों, इसके अध्यक्ष, सम्पादकों, समीक्षकों तथा इनसे संबंधित संस्थानों को धन्यवाद देता हूँ। पुस्तक में सुधार हेतु सुझावों का स्वागत किया जाएगा।

जे. एस. राजपूत
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
जून 2002

प्रस्तावना

औपचारिक शिक्षा के प्रारंभ से ही गणित विद्यालयी शिक्षा का एक अभिन्न अंग रहा है। इसने न केवल सभ्यता की उन्नति में बल्कि भौतिक विज्ञानों और अन्य विषयों के विकास में भी प्रबल भूमिका निभाई है। चूँकि किसी भी अग्रमुखी शिक्षा पद्धति में पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए समाज की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न प्रकार के परिवर्तन हुए हैं।

शिक्षक-प्रशिक्षकों, विभिन्न परीक्षा बोर्डों से नामित व्यक्तियों, शिक्षा निदेशालयों और विभिन्न राज्यों / संघ राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषदों (एस.सी.ई.आर.टी.), के प्रतिनिधियों, सामान्य जन और विश्वविद्यालयों, महाविद्यालयों और परिषद् के संकाय द्वारा की गई विभिन्न चर्चाओं के आधार पर उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के संबंध में उभर कर आए कुछ सामान्य पाठ्यपुस्तक सरोकार इस प्रकार हैं :

- पाठ्यचर्या को सामाजिक परिवेश और व्यक्ति विशेष के जन्म से संबंद्ध पूर्वाग्रहों को निष्प्रभावित करने तथा सार्वजनिक भाव एवं समानता की जागरूकता का सृजन करने योग्य होना चाहिए।
- बालिका शिक्षा।
- पर्यावरण संरक्षण।
- स्वदेशीय ज्ञान और प्राचीन काल से अब तक विज्ञान और गणित में भारत के योगदान का समुचित समावेश।
- अप्रचलित और अनावश्यक विषयवस्तु को हटाकर पाठ्यचर्या के बोझ में कमी तथा माध्यमिक स्तर पर गणित के शिक्षण के लिए आवश्यक ज्ञान एवं पृष्ठभूमि प्रदान करना।

उपरोक्त सरोकारों को ध्यान में रखते हुए, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने गणित की पाठ्यपुस्तकों को विकसित करने के लिए लेखक दलों का गठन किया। प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक उच्च प्राथमिक स्तर के लेखक दल के प्रयत्नों का एक परिणाम है।

इस पाठ्यपुस्तक में निम्नलिखित बातों का विशेष ध्यान रखा गया है :

- ज्ञान की नवीन विचारधारा का आविर्भाव।
- उभरती हुई किनारे काटती प्रौद्योगिकी द्वारा गणित को दी गई चुनौतियाँ।
- अंतिम परन्तु अनावश्यक नहीं, पूर्व पाठ्यपुस्तक के प्रयोक्ताओं से प्राप्त पुनर्निवेशन।

इस पुस्तक को तैयार करने में बहुत अधिक प्रयत्न किए गए हैं। सर्व प्रथम, विभिन्न लेखकों द्वारा तैयार की गई प्रारूप सामग्री पर लेखक दल के सदस्यों ने परस्पर चर्चा की और इस सामग्री को उस पर प्राप्त टिप्पणियों एवं सुझावों के आधार पर संशोधित किया। इस संशोधित सामग्री को फिर एक समीक्षा कार्यशाला में शिक्षकों एवं विशेषज्ञों के एक समूह के सम्मुख रखा गया। इस समीक्षा कार्यशाला के प्रतिभागियों द्वारा दी गई टिप्पणियों एवं सुझावों के आधार पर पाण्डुलिपि को अंतिम रूप प्रदान किया गया।

इस पाठ्यपुस्तक के [illegible] निम्नलिखित हैं :

- जहाँ तक संभव हो सका है, [illegible] माध्यम से कराया गया है।
- [illegible] सम्मिलित किए गए हैं। ऐसा सोच-समझकर किया गया है ताकि विद्यार्थी में अवधारणाओं को बेहतर ढंग से समझकर प्रश्नों को बेहतर ढंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि की जा सके।
- गणितीय तथ्यों की (पुन:) खोज करने और आरेखण एवं मापने के लिए दक्षता के विकास हेतु अनेक क्रियाकलाप सुझाए गए हैं।
- [illegible] विकसित करने के लिए कुछ शाब्दिक समस्याओं को सम्मिलित किया गया है। विद्यार्थियों के मस्तिष्क में इन शाब्दिक समस्याओं के प्रमुख संदेश पहुँचने चाहिए तथा शिक्षण के समय अध्यापकों को इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए।
- पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली और पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है।
- प्रत्येक अध्याय के अंत में, महत्वपूर्ण संकल्पनाओं एवं परिणामों की एक सूची शीर्षक [illegible] के रूप में दी गई है।

- प्रत्येक एकक के अंत में, ऐतिहासिक संदर्भों, विशेषकर भारतीय योगदानों का शीर्षक "[illegible]" के रूप में उल्लेख किया गया है।

मैं प्रो. जे.एस.राजपूत, निदेशक शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् का धन्यबाद करती हूँ जिन्होंने पाठ्यचर्या नवीनीकरण की इस परियोजना का शुभारम्भ किया और गणित शिक्षा में सुधार हेतु इस राष्ट्रीय प्रयास में हमें सम्मिलित होने का अवसर प्रदान किया जिससे हम गणित शिखा के सुधार के प्रति अपना व्यावसायिक ऋण चुका सकें। मैं प्रो. आर.डी. शुक्ल, अध्यक्ष, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग को भी उनके गतिशील नेतृत्व, इस कार्य में भरपूर सहयोग देने तथा अन्य सुविधाएँ उपलब्ध कराने के लिए धन्यबाद देती हूँ। लेखक दल के सभी सदस्य और समीक्षा कार्यशाला के सभी प्रतिभागी भी धन्यबाद के प्रात्र हैं।

इस पाठ्यपुस्तक का हिन्दी में अनुवाद प्रो. सुन्दर लाल एवं स्वयं मैंने किया है। हिन्दी पाण्डुलिपि का विषय संपादन श्री महेन्द्र शंकर द्वारा किया गया।

इस लम्बी प्रस्तावना को समाप्त करते हुए, मैं बार-बार और अधिकतर दी जाने वाली चेतावनी का उल्लेख करना चाहूँगी कि किसी भी विषय पर कोई भी पुस्तक अंतिम नहीं हो सकती। हमने अपनी ओर से उपलब्ध सीमित समय में अच्छी से अच्छी सामग्री प्रदान करने का भरसक प्रयास किया है; फिर भी हम जानते हैं कि इसमें सुधार हो सकता है। इसमें सुधार हेतु सुझाव/टिप्पणियों का स्वागत है। मुझे आशा है कि पाठक इस पुस्तक को पढ़ते समय उतना ही आनंद लेंगे जितना हमें इसके लिखते समय प्राप्त हुआ है।

आशा रानी सिंगल
अध्यक्ष
लेखक दल

पाठ्यपुस्तक के विकास एवं समीक्षा हेतु कार्यशाला के प्रतिभागी

1. प्रो. आशा रानी सिंगल
   (अध्यक्ष)
   ए-1, स्टाफ रेसीडेन्स
   चौधरी चरण सिंह विश्वविद्यालय
   मेरठ (उत्तर प्रदेश)

2. श्री अशोक कुमार गुप्ता
   सर्वोदय विद्यालय
   जी.पी. ब्लाक, पीतमपुरा,
   दिल्ली

3. सुश्री रूचि सलारया
   केन्द्रीय विद्यालय
   ए. एफ. एस, बवाना
   दिल्ली

4. सुश्री सरिता रेवरी
   राजकीय उच्चतर माध्यमिक बालिका
   विद्यालय नं01
   रूप नगर, दिल्ली

5. डा. रणवीर सिंह
   सर्वोदय बाल विद्यालय नं01
   सरोजिनी नगर, नई दिल्ली

6. प्रो. सुन्दर लाल
   इंस्टीट्यूट ऑफ बेसिक साइंसेस
   बी.आर. अंबेडकर विश्वविद्यालय, आगरा

7. सुश्री उर्मिल बधवा
   ए-3/193, जनकपुरी, नई दिल्ली

8. प्रो. सत्य नारायण चौरसिया
   राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान
   इलाहाबाद (उत्तर प्रदेश)

9. श्री मगन लाल मीना
   डी एम स्कूल, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान
   अजमेर

10. प्रो. बी. देवकीनन्दन
    डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी.
    नई दिल्ली

11. श्री महेन्द्र शंकर (समन्वयक)
    डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी.
    नई दिल्ली

विषय सूची

गांधी जी का जन्तर

तुम्हें एक जन्तर देता हूं। जब भी तुम्हें सन्देह हो या तुम्हारा अहम् तुम पर हावी होने लगे, तो यह कसौटी आजमाओ :

जो सबसे गरीब और कमजोर आदमी तुमने देखा हो, उसकी शकल याद करो और अपने दिल से पूछो कि जो कदम उठाने का तुम विचार कर रहे हो, वह उस आदमी के लिए कितना उपयोगी होगा। क्या उससे उसे कुछ लाभ पहुंचेगा ? क्या उससे वह अपने ही जीवन और भाग्य पर कुछ काबू रख सकेगा ? यानि क्या उससे उन करोड़ों लोगों को स्वराज्य मिल सकेगा जिनके पेट भूखे हैं और आत्मा अतृप्त है ?

तब तुम देखोगे कि तुम्हारा सन्देह मिट रहा है और अहम् समाप्त होता जा रहा है।

प्राकृत संख्याएँ एवं पूर्ण संख्याएँ

अध्याय

1.1 भूमिका

कक्षा पाँच में हमने संख्याओं के बारे में पढ़ा जिनमें छोटी और बड़ी सभी प्रकार की संख्याएँ थीं। हमने भिन्न तथा दशमलव संख्याओं का अध्ययन किया। हमने इन संख्याओं पर चार मूलभूत संक्रियाओं का भी अध्ययन किया। इस अध्याय में हम संख्याओं को अधिक सुव्यवस्थित ढंग से तथा विस्तार में पढ़ेंगे। हम *प्राकृत संख्याओं* एवं *पूर्ण संख्याओं* के विचार को प्रस्तुत करेंगे। हम इन संख्या-निकायों के कुछ गुणों पर विचार करेंगे। हम प्राकृत संख्याओं एवं पूर्ण संख्याओं पर विभिन्न संक्रियाओं व उनके कुछ गुणों का भी अध्ययन करेंगे।

1.2 प्राकृत संख्याएँ

संख्याओं की खोज मूल रूप से गिनने के लिए की गयी थी। हम गिनने के लिए संख्याओं 1, 2, 3,... का प्रयोग करते हैं। इसलिए इन संख्याओं को ***गणन संख्याएँ*** *(counting numbers)* कहते हैं। हम इन गणन संख्याओं को ***प्राकृत संख्याएँ*** *(natural numbers)* भी कहेंगे। इस प्रकार 1, 2, 3, ...,10,...,97,.., 11237, ... सभी प्राकृत संख्याएँ हैं। सप्ताह में दिनों की संख्या एक प्राकृत संख्या है। एक पुस्तक के किसी पृष्ठ पर अक्षरों की संख्या एक प्राकृत संख्या है। भारत में विद्यालयों की संख्या एक प्राकृत संख्या है। हमारे ग्रह पर वृक्षों की संख्या एक प्राकृत संख्या है। एक से एक करोड़ तक की जो संख्याएँ आपने कक्षा 5 में पढ़ी हैं वे सभी प्राकृत संख्याएँ हैं। परन्तु 3.9, 6.75 जैसी दशमलव संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ नहीं हैं। इसी प्रकार $\frac{3}{9}, \frac{109}{211}$ जैसी भिन्न संख्याएँ भी प्राकृत संख्याएँ नहीं हैं।

हम संख्या 1 से गिनना प्रारंभ करते हैं। इस प्रकार 1 प्रथम प्राकृत संख्या है। अगली प्राकृत संख्या 2 है जो प्रथम प्राकृत संख्या में 1 जोड़ने पर प्राप्त होती है। 2 में 1 जोड़ने पर 3, अर्थात् तीसरी प्राकृत संख्या प्राप्त होती है। वस्तुतः किसी प्राकृत संख्या में 1 जोड़ने पर अगली प्राकृत संख्या प्राप्त हो जाती है। इस प्रकार 100 (= 99+1), 99 से अगली प्राकृत संख्या है। अब प्रश्न उठता है 'प्राकृत संख्याएँ

कितनी हैं?' यदि हम 1, 2, 3, ..., 100, ..., 200 गिनना प्रारम्भ करें और गिनते चले जाएँ, तो कोई अन्त नहीं होगा। हम दिन रात पूरे जीवन भर गिनते रहें तब भी हम अन्त तक नहीं पहुँच पाएँगे। दूसरे शब्दों में कहें तो 'हम प्राकृत संख्याओं की गिनती पूर्ण नहीं कर पाएँगे।' स्पष्ट है कि कोई भी संख्या अन्तिम अथवा सबसे बड़ी प्राकृत संख्या नहीं हो सकती। यदि हम मान लें कि प्राकृत संख्या p अन्तिम प्राकृत संख्या है, तो $p+1$ भी एक प्राकृत संख्या है जो 'अन्तिम' संख्या p से अगली संख्या है। इस प्रकार तथाकथित अन्तिम प्राकृत संख्या वास्तव में *अन्तिम* संख्या नहीं है।

प्राकृत संख्याओं के बारे में कुछ सामान्य तथ्य संक्षेप में इस प्रकार हैं:

1. पहली तथा सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 है।
2. कोई भी प्राकृत संख्या (केवल 1 को छोड़ कर) पिछली प्राकृत संख्या में 1 जोड़ कर प्राप्त की जा सकती है।
3. प्राकृत संख्या 1 के लिए कोई भी पिछली प्राकृत संख्या नहीं है (यद्यपि $1=0+1$, परंतु 0 एक प्राकृत संख्या ***नहीं*** है।)।
4. कोई भी संख्या सबसे *बड़ी* अथवा *अन्तिम* प्राकृत संख्या नहीं है।
5. हम प्राकृत संख्याओं की गिनती पूरी नहीं कर सकते। इस तथ्य को हम इस प्रकार भी कहते हैं कि ***प्राकृत संख्याएँ अपरिमित हैं***।

1.3 संख्या शून्य

यदि किसी कक्षा में कुछ विद्यार्थी हैं, तो हम उनकी गिनती करके बता सकते हैं कि कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या कितनी है और यह संख्या एक प्राकृत संख्या है। परन्तु कक्षा समाप्त होने के बाद जब वहाँ कोई भी विद्यार्थी उपस्थित नहीं है, तो संख्यात्मक रूप में हम कहेंगे कि *कक्षा में **शून्य** विद्यार्थी हैं अथवा कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या शून्य है।* इस संख्या को हम संकेत 0 से प्रदर्शित करते हैं। अतः 0 'कुछ भी नहीं', 'रिक्तता', 'खालीपन' आदि प्रदर्शित करता है। इसे प्राकृत संख्या नहीं माना जाता।

टिप्पणी : पिछली कक्षाओं में हमने 0 का उपयोग स्थान धारक के रूप में किया है। संख्याओं 10, 201, 5029070 आदि में 0 का प्रयोग स्थान धारक के रूप में किया गया है, संख्या शून्य के रूप में नहीं।

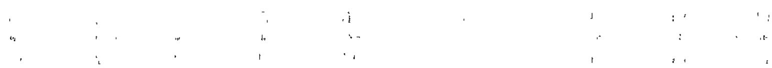
1.4 पूर्ण संख्याएँ एवं संख्या रेखा

संख्या शून्य को सम्मिलित करने पर जो संख्याएँ प्राप्त होती हैं उन्हें ***पूर्ण***

संख्याएँ *(whole numbers)* कहा जाता है। इस प्रकार संख्याएँ 0, 1, 2, 3, ... पूर्ण संख्याएँ हैं। अर्थात् एक पूर्ण संख्या या तो शून्य है अथवा एक प्राकृत संख्या है। पूर्ण संख्याओं के बारे में कुछ तथ्य इस प्रकार हैं:

1. संख्या शून्य पहली तथा सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।
2. कोई भी संख्या अन्तिम अथवा सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं हो सकती।
3. पूर्ण संख्याएँ अपरिमित हैं।

पूर्ण संख्याओं के कुछ और गुणों को जानने के लिए हम इन्हें एक रेखा पर निरूपित करेंगे। इस रेखा को ***संख्या रेखा*** *(Number Line)* कहते हैं। संख्या रेखा की रचना के लिए हम एक सरल रेखा बनाते हैं तथा इसके किसी बिन्दु को O से दर्शाते हैं। इस बिन्दु O को हम शून्य (0) का संगत बिन्दु मान लेते हैं। अब O से प्रारम्भ करके इसी रेखा पर O के दाईं ओर समान दूरी पर क्रमशः बिन्दु A, B, C, D, ... आदि लिखते हैं।



आकृति 1.1

यदि हम O से A की दूरी को एक इकाई या मात्रक (unit) मानें, तो दूरियों AB, BC, CD, ... में से प्रत्येक एक मात्रक होगी। इस प्रकार दूरी OB (= OA + AB) दो मात्रक, दूरी OC (= OB + BC) तीन मात्रक, दूरी OD चार मात्रक इत्यादि हैं। क्योंकि बिन्दु O पूर्ण संख्या शून्य का संगत बिन्दु है, अतः बिन्दु A, B, C, D, क्रमशः 1, 2, 3, 4,... के संगत होंगे। इसलिए हम A, B, C, D, ... आदि के लिए 1, 2, 3, 4, आदि लिख सकते हैं (देखिए आकृति 1.1)। इस सरल रेखा का किसी भी दूरी तक विस्तार दिया जा सकता है। अतः बिन्दु O के दाईं ओर अपनी इच्छा से हम जितने बिन्दु चाहें, प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार इस रेखा पर हम कोई भी पूर्ण संख्या प्रदर्शित कर सकते हैं। सरल रेखा के दोनों ओर लगे तीर चिह्न इस रेखा का दोनों ओर असीमित विस्तार प्रदर्शित करते हैं। परन्तु पूर्ण संख्याएँ बिन्दु O के दाईं ओर ही प्रदर्शित की गयी हैं। सुविधा के लिए हम बिन्दुओं को उनके द्वारा प्रदर्शित संख्याओं के सर्वसम (identical) मान लेते हैं। इस प्रकार बिन्दु A को संख्या 1, बिन्दु B को संख्या 2,...., बिन्दु N को संख्या 14 आदि माना जा सकता है। बिन्दुओं द्वारा संख्याओं के इस निरूपण से हम पूर्ण संख्याओं के कई महत्वपूर्ण गुण प्राप्त कर सकते हैं। इन गुणों में एक है पूर्ण संख्याओ का **क्रम गुण** (order property)।

संख्या रेखा पर 7 संख्या 3 के दाईं ओर स्थित है और हम जानते हैं कि 7>3 है। इसी प्रकार 4, संख्या 10 के बाईं ओर स्थित है तथा 4 < 10 है। अत: दो पूर्ण संख्याओं में संख्या रेखा पर छोटी संख्या बड़ी संख्या के बाईं ओर स्थित होती है। यदि a तथा b दो भिन्न पूर्ण संख्याएँ हों, तो इनके द्वारा संख्या रेखा पर निरूपित बिन्दु भी भिन्न होंगे। यदि संख्या a द्वारा निरूपित बिन्दु संख्या b द्वारा निरूपित बिन्दु के बाईं ओर स्थित है, तो $a<b$ होगा। परन्तु यदि a द्वारा निरूपित बिन्दु b के द्वारा निरूपित बिन्दु के दाईं ओर स्थित है, तो $b<a$ होगा। अत: किन्ही भी दो पूर्ण संख्याओं की तुलना की जा सकती है। हम इसे पूर्ण संख्याओं का ***क्रम गुण*** कहते हैं।

यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हैं तो (i) $a=b$ अथवा (ii) $a<b$ अथवा (iii) $a>b$ होता है। यदि $a<b$ है और c एक पूर्ण संख्या ऐसी है कि $a<c<b$ है, तो हम कहते हैं कि c संख्याओं a तथा b के मध्य स्थित है। उदाहरणार्थ $2<4<5$, $100 < 200 < 300$ हैं। अत: 4, पूर्ण संख्याओं 2 व 5 के मध्य स्थित है; 200 पूर्ण संख्याओं 100 तथा 300 के मध्य स्थित है; आदि। यदि संख्याएँ a तथा b इस प्रकार हैं कि $a<b$ है परन्तु कोई भी पूर्ण संख्या c इस प्रकार नहीं है कि $a<c<b$ है, तो इस स्थिति में $b=a+1$, होगा। यहाँ हम b को a का ***परवर्ती*** *(successor)* तथा a को b का ***पूर्ववर्ती*** *(predecessor)* कहते हैं। उदाहरण के लिए, 3 पूर्ण संख्या 2 का परवर्ती है तथा 0 संख्या 1 का पूर्ववर्ती है। शून्य के अतिरिक्त सभी पूर्ण संख्याओं का एक पूर्ववर्ती तथा एक परवर्ती होता है। शून्य का केवल परवर्ती होता है और उसका कोई पूर्ववर्ती नहीं होता। विषम संख्या का परवर्ती सम होता है और सम संख्या का परवर्ती विषम होता है। इसी प्रकार, विषम संख्या का पूर्ववर्ती सम तथा सम संख्या का पूर्ववर्ती विषम होता है।

: ध्यान दीजिए कि 0 व 1 पूर्ण संख्याएँ हैं, 0<1 तथा 0 व 1 के बीच कोई पूर्ण संख्या नहीं होती। इस प्रकार 1 = 0 + 1 है।

प्रश्नावली 1.1

1. लिखिए :

(i) सबसे छोटी पूर्ण संख्या (ii) सबसे छोटी प्राकृत संख्या

2. यदि संभव है तो लिखिए:

(i) सबसे बड़ी प्राकृत संख्या (ii) सबसे बड़ी पूर्ण संख्या

3. निम्न संख्याओं में से प्रत्येक के पूर्ववर्ती लिखिए:

(i) 93 (ii) 2000 (iii) 7008000

4. निम्न संख्याओं में से प्रत्येक के परवर्ती लिखिए:

(i) 1000906 (ii) 2340700 (iii) 1039909

5. संख्याओं 81 तथा 101 के बीच कितनी पूर्ण संख्याएँ हैं?

6. क्या सभी प्राकृत संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ भी हैं? क्या सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ भी हैं?

7. निम्न में से प्रत्येक संख्या की अगली तीन क्रमागत प्राकृत संख्याएँ लिखिए:

(i) 53 (ii) 721 (iii) 856

8. संख्या 1009999 से अगली तीन क्रमागत प्राकृत संख्याएँ लिखिए ।

9. संख्या 9410001 के पूर्ववर्ती तीन पूर्ण संख्याएँ लिखिए :

10. निम्न में से प्रत्येक कथन के समक्ष सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) 102345 अंक 5 पर समाप्त होने वाली सबसे छोटी 6 अंकीय प्राकृत संख्या है।

(ii) 400 संख्या 399 का पूर्ववर्ती है।

(iii) 500 सबसे बड़ी तीन अंकीय संख्या का परवर्ती है।

(iv) पाँच अंकीय सबसे छोटी संख्या सबसे बड़ी चार अंकीय संख्या का परवर्ती है।

(v) दी गई दो प्राकृत संख्याओं में बड़ी संख्या वही है जिसमें अधिक अंक है।

(vi) किसी दो अंकीय संख्या का पूर्ववर्ती एक अंकीय संख्या नहीं हो सकता।

(vii) यदि a तथा b दो प्राकृत संख्याएँ हैं और $a < b$ है, तो एक प्राकृत संख्या c इस प्रकार होती है कि $a < c < b$ हो।

(viii) यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हैं और $a < b$, तो $a + 1 < b + 1$ होता है।

(ix) प्राकृत संख्या 1 का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता।

(x) पूर्ण संख्या 1 का पूर्ववर्ती 0 होता है।

1.6 पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएँ   योग

हम संख्याओं पर चार मूलभूत संक्रियाओं — योग (जोड़ना), व्यवकलन (घटाना), गुणा तथा भाग, से भली भाँति परिचित हैं। यहाँ हम इन संक्रियाओं के कुछ गुणों का अध्ययन करेंगे। इस अध्ययन में सम्मिलित सभी संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ ही हैं।

हम जानते हैं कि दो संख्याओं का योग किस प्रकार ज्ञात किया जाता है। संख्याओं 8 तथा 21 का योग 29 है। यहाँ 8 तथा 21 पूर्ण संख्याएँ हैं तथा इनका योग 29 भी एक पूर्ण संख्या है। हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याओं 8 तथा 21 का योग पूर्ण संख्या 29 है। आइए, कुछ और उदाहरण देखें:

	35792	+ 8364	=	44156
अर्थात्	पूर्ण संख्या	+ पूर्ण संख्या	=	पूर्ण संख्या

आइए, अब देखें कि किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं a और b को किस प्रकार जोड़ा जाता है। 0 को छोड़ कर, सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ हैं। इस प्रकार, या तो a और b दोनों प्राकृत संख्याएँ हैं या इनमें से एक शून्य है। जब a और b दोनों प्राकृत संख्याएँ हैं, तब आप जानते हैं कि इन्हें किस प्रकार जोड़ा जाता है। उनका योग $a+b$ एक प्राकृत संख्या है और इसीलिए एक पूर्ण संख्या भी है। हम इस संख्या को पूर्ण संख्याओं a और b का योग मान कर चलते हैं। जब a शून्य (0) हो, तब हम $a + b = b$ लेते हैं। यह तथ्य संख्या रेखा से स्पष्ट विदित है। इस प्रकार

पूर्ण संख्या + पूर्ण संख्या = पूर्ण संख्या

उपर्युक्त उदाहरणों से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योग एक पूर्ण संख्या होता है। वास्तव में, उपर्युक्त उदाहरण पूर्ण संख्याओं के निम्नलिखित गुण का विशेष प्रकरण है:

गुण 1: ***यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हैं तथा $a+b=c$ है, तो c भी एक पूर्ण संख्या होती है।***

यदि हम पूर्ण संख्या 7 को 25 में जोड़ें, तो संख्या 32 प्राप्त होती है। यदि हम संख्या 25 को 7 में जोड़ें , तब भी संख्या 32 ही प्राप्त होती है। इसी प्रकार, 69 को 82 में जोड़ने पर तथा 82 को 69 में जोड़ने पर एक ही संख्या 151 प्राप्त होती है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि

$$7 + 25 = 25 + 7, \text{ तथा } 69 + 82 = 82 + 69$$

हम पूर्ण संख्याओं के कुछ और युग्म लेकर उनको दो भिन्न क्रमों में जोड़ कर देख सकते हैं कि योगफल वही रहता है। यह निष्कर्ष भी पूर्ण संख्याओं के योग के निम्नलिखित गुण का एक विशेष प्रकरण है:

गुण II : *यदि a तथा b दो पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a + b = b + a$ होता है।*

अब हम तीन संख्याओं के योग पर विचार करेंगे। मान लीजिए 2, 5 व 8 तीन पूर्ण संख्याएँ हैं जिनका योग हमें ज्ञात करना है। हम एक बार में केवल दो पूर्ण संख्याओं का योग ज्ञात करते हैं। अतः 2 व 5 का योग 7 प्राप्त होता है। अब 7 तथा तीसरी संख्या 8 का योग करते हैं और इस प्रकार संख्या 15 प्राप्त होती है। यहाँ हम योग इस प्रकार प्राप्त कर रहे हैं:

$$(2 + 5) + 8 = 15$$

हम इनको दूसरे क्रम में भी जोड़ सकते हैं। पहले 5 तथा 8 को जोड़ कर 13 प्राप्त करते हैं और इसके बाद 2 व 13 को जोड़ कर 15 प्राप्त करते हैं। इस प्रक्रिया में हम योग इस प्रकार प्राप्त करते हैं: $2 + (5 + 8) = 15$

इन दो विभिन्न क्रमों में योग करने पर भी हमें एक ही संख्या प्राप्त होती है। दूसरे शब्दो में, हम कह सकते हैं:

$$(2 + 5) + 8 = 2 + (5 + 8)$$

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं:

$$(12 + 4) + 9 = 16 + 9 = 25,$$
$$12 + (4 + 9) = 12 + 13 = 25$$

यहाँ भी हम देखते हैं कि

$$(12 + 4) + 9 = 12 + (4 + 9)$$

इसी प्रकार,

$$(9 + 11) + 13 = 9 + (11 + 13)$$

व्यापक रूप में, इस गुण को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

गुण III : *यदि a, b व c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं, तो*

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

इस उभयनिष्ठ संख्या को हम $a + b + c$ से प्रदर्शित करते हैं।

पुनः तीन पूर्ण संख्याओं a, b, c के योग पर विचार करें। ये तीन संख्याएँ विभिन्न क्रमों में जोड़ी जा सकती हैं यथा $a + b + c, a + c + b, c + b + a, b + a + c,$

$b + c + a$ व $c + a + b$। गुण II व गुण III के द्वारा एक निष्कर्ष यह है कि ये सभी पूर्ण संख्याएँ समान हैं। हम एक उदाहरण द्वारा इस तथ्य को स्पष्ट कर सकते हैं। मान लीजिए कि हमारी संख्याएँ 1, 2 व 3 हैं। तब

$$1 + 2 + 3 = (1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$1 + 3 + 2 = (1 + 3) + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$3 + 2 + 1 = (3 + 2) + 1 = 5 + 1 = 6$$

$$2 + 1 + 3 = (2 + 1) + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$2 + 3 + 1 = (2 + 3) + 1 = 5 + 1 = 6$$

$$3 + 1 + 2 = (3 + 1) + 2 = 4 + 2 = 6$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि तीन पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। योग सदैव एक सा ही रहेगा।

यदि हमारे पास जोड़ने के लिए चार अथवा चार से अधिक संख्याएँ हैं, तो भी जोड़ने की प्रक्रिया विभिन्न प्रकार से की जा सकती है और यहाँ भी अन्तिम योग समान ही रहेगा। उदाहरणार्थ, संख्याओं 2, 3, 5 व 9 का योग निम्नलिखित किसी भी प्रक्रिया से प्राप्त किया जा सकता है:

$$[(2 + 3) + 5] + 9 = (5 + 5) + 9 = 10 + 9 = 19$$

$$[(3 + 5) + 9] + 2 = (8 + 9) + 2 = 17 + 2 = 19$$

$$[(5 + 9) + 2] + 3 = (14 + 2) + 3 = 16 + 3 = 19$$

$$[(9 + 2) + 3] + 5 = (11 + 3) + 5 = 14 + 5 = 19$$

$$[(2 + 5) + 3] + 4 = (7 + 3) + 9 = 10 + 9 = 19$$

$$[(3 + 9) + 2] + 5 = (12 + 2) + 5 = 14 + 5 = 19$$

उपर्युक्त उदाहरणों की तरह, यदि हमारे पास योग करने के लिए दो से अधिक संख्याएँ हैं, तो उन्हें किसी दिए हुए क्रम मे जोड़ना आवश्यक नहीं है। पूर्व में दिए गए पूर्ण संख्याओं के योग के तीन गुणों के फलस्वरूप हम जोड़ने का कोई भी क्रम अपना सकते हैं। इसके लिए हम निम्नलिखित प्रक्रिया अपना सकते हैं:

चरण 1: किन्ही भी दो संख्याओं का चयन कर उनका योग प्राप्त करें।

चरण 2: शेष बची संख्याओं में से किसी एक संख्या का चयन कर पिछले योग में जोड़ें।

चरण 3: सभी संख्याओं का योग होने तक चरण 2 को करते रहें।

चरणों 1 व 2 में संख्याओं का चयन हम किसी भी प्रकार कर सकते हैं। व्यवहार में, हम संख्याओं का चयन इस प्रकार करते हैं कि परिकलन सरल एवं सुविधापूर्वक किए जा सकें।

उदाहरण 1: संख्याओं 13, 412, 687 तथा 908 का योग ज्ञात कीजिए।

हल: 13 + 412 + 687 + 908

= (13 + 687) + 412 + 908 (चरण 1)

= 700 + 412 + 908

= (700 + 908) + 412 (चरण 2)

= 1608 + 412 (चरण 3)

= 2020

टिप्पणी: व्यवहार में उपर्युक्त प्रक्रिया की अपेक्षा निम्नलिखित प्रक्रिया का उपयोग अधिक सुविधाजनक है:

चरण 1: किन्हीं दो उपयुक्त संख्याओं का चयन कर उनका योग ज्ञात करें।

चरण 2: इन दो संख्याओं को हटा कर इनके स्थान पर एक संख्या अर्थात् इनका योग रखें।

चरण 3: चरणों 1 व 2 को तब तक दोहराते रहें जब तक केवल एक संख्या प्राप्त न हो जाए।

इन चरणों का उपयोग कर उपर्युक्त योग निम्न प्रकार प्राप्त किया जा सकता है:

13 + 412 + 687 + 908

= (13+687)+412+908 (चरण 1)

= 700+412+908 (चरण 2)

= 700+(412+908) (चरण 1)

= 700+1320 (चरण 2)

= 2020 (चरण 1)

पूर्ण संख्याओं के निकाय में एक ऐसी संख्या है जिसका एक विशेष गुण है जो किसी भी अन्य पूर्ण संख्या में नहीं है। यह संख्या शून्य है तथा यह विशेष गुण इस प्रकार है: *यदि हम शून्य को किसी पूर्ण संख्या में जोड़ें, तो योग वह पूर्ण संख्या*

ही होगी। उदाहरणार्थ $3+0=3$, $4+0=4$, $5000+0=5000$ आदि। शून्य ही अकेली ऐसी संख्या है जिसमें यह गुण होता है। इस प्रकार हमें प्राप्त है:

गुण IV : *पूर्ण संख्या 0 इस प्रकार होती है कि प्रत्येक पूर्ण संख्या a के लिए $a+0=0+a=a$ है। शून्य इस प्रकार की अकेली पूर्ण संख्या है।*

1.7 पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएँ व्यवकलन

हम जानते हैं कि एक बड़ी प्राकृत संख्या में से एक दूसरी प्राकृत संख्या किस प्रकार घटाई जाती है। पूर्ण संख्याओं का व्यवकलन (घटाना), निम्न दो स्थितियों को छोड़कर, प्राकृत संख्याओं के घटाने के तरह ही है:

स्थिति I : यदि $a=b$, तो $a-b=0$ होता है।

स्थिति II: यदि $b=0$, तो $a-b=a$ होता हैं।

उदाहरणार्थ यदि हम 100 में से 97 घटाएँ, तो 3 प्राप्त होता है। यहाँ 100, 97 तथा 3 तीनों पूर्ण संख्याएँ हैं। इसी प्रकार पूर्ण संख्या 49 में से पूर्ण संख्या 35 घटाने पर पूर्ण संख्या 14 प्राप्त होती है। यदि हम 43 में से 43 को घटाएँ, तो हमें 0 प्राप्त होता है। यदि हम 51 में से 0 घटाएँ, तो हमें 51 प्राप्त होता है। क्या योग के गुण I की तरह हम कह सकते हैं कि एक पूर्ण संख्या में से दूसरी पूर्ण संख्या घटाने पर एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है? संख्या 97 में से संख्या 100 घटाने पर क्या होता है? क्या 97 में से 100 निकाला जा सकता है? पूर्ण संख्या निकाय में यह संभव नहीं है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि 97–100 पूर्ण संख्या नहीं है। यह एक संख्या है परन्तु इस प्रकार की संख्याओं पर हम बाद में विचार करेंगे।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि योग का गुण I व्यवकलन के लिए सत्य नहीं है। अर्थात् एक पूर्ण संख्या में से दूसरी पूर्ण संख्या घटाने पर जो संख्या प्राप्त होती है वह पूर्ण संख्या हो भी सकती है तथा नहीं भी हो सकती। वास्तव में, व्यवकलन के लिए निम्नलिखित गुण होता है:

गुण I: *यदि a तथा b दो पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a-b$ एक पूर्ण संख्या है यदि $a>b$ या $a=b$ हो। यदि $a<b$ है, तो $a-b$ पूर्ण संख्या नहीं है।*

योग का गुण II भी व्यवकलन के लिए सत्य नहीं है। 10–3 (=7) एक पूर्ण संख्या है परंतु 7–10 एक पूर्ण संख्या नहीं है।

गुण II: *यदि a तथा b दो पूर्ण संख्याएँ हैं और $a \neq b$ है, तो इस स्थिति में या तो $a-b$ पूर्ण संख्या होगी या $b-a$ पूर्ण संख्या होगी। केवल*

$a = b$ होने पर ही दोनों पूर्ण संख्याएँ होंगी।

इस गुण के परिपेक्ष में दो असमान पूर्ण संख्याओं a तथा b के लिए '$a - b = b - a$' एक अर्थहीन कथन है।

गुण II के समान ही योग का गुण III भी व्यवकलन के लिए सत्य नहीं है। उदाहरण के लिए $(16 - 8) - 4 = 8 - 4 = 4$ है, परन्तु $16 - (8 - 4) = 16 - 4 = 12$ है।

गुण III : ***यदि a, b व c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं तथा c शून्य नहीं है, तो $a - (b - c)$ कभी भी $(a - b) - c$ के बराबर नहीं होगा।***

जहाँ तक योग के गुण IV का संबंध है वह व्यवकलन के परिपेक्ष में आंशिक रूप में ही सत्य है। सभी पूर्ण संख्याओं a के लिए $a - 0 = a$ सत्य है। उदाहरणार्थ,

$$17 - 0 = 17$$

गुण IV: ***किसी भी पूर्ण संख्या a में से 0 घटाने पर पूर्ण संख्या a ही प्राप्त होती है।***

हम जानते हैं कि $16 - 9 = 7$ है। साथ ही, $9 + 7 = 16$ है। इसी प्रकार, $96 - 45 = 51$ है तथा $45 + 51 = 96$ है। व्यापक रूप में, इस गुण को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

गुण V: यदि a, b, c पूर्ण संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $a - b = c$ है, तो $b + c = a$ होता है।

● ● ●

प्रश्नावली 1.2

1. निम्न में रिक्त स्थान इस प्रकार भरिए कि प्रत्येक कथन सत्य बन जाए:

   (i) 1005 + 283 = ------- +1005

   (ii) 300507 + 0 = -------

   (iii) 12345 + (679 + 321) = (679 +-----)+ 321

2. निम्न में से प्रत्येक योग को प्राप्त करिए तथा योग के गुण II की जाँच कीजिए:

   (i) 5628 + 39784 (ii) 39784 + 5628

   (iii) 923584 + 178 (iv) 178 + 923584

3. निम्न योगों को प्राप्त कर के योग के गुण III की जाँच कीजिए:

   (i) (15409 + 112) + 591 (ii) 15409 + (112 + 591)

   (iii) (2359 + 641) +10000 (iv) 2359 + (641 + 10000)

4. उपयुक्त क्रम लेकर निम्न योग प्राप्त कीजिए:
   (i) 637 + 908 + 363
   (ii) 2062 +353 + 1438 + 547

5. निम्न व्यवकलन कीजिए तथा परिणाम की जाँच संगत योग (व्यवकलन का गुण V) द्वारा कीजिए:
   (i) 7839 – 983 (ii) 12304 – 10999
   (iii) 100000 – 98765 (iv) 2020201 – 565656

6. निम्न संक्रियाएँ कीजिए तथा व्यवकलन के गुण III का सत्यापन कीजिए:
   (i) 196725 – (72916 – 53472) और (196725 – 72916)– 53472
   (iii) 82795 – (40302 –37875) और (82795 – 40302) – 37875

7. निम्न में प्रत्येक * के स्थान पर सही अंक लिखिए:

(i)
```
   9 7 3
 – * * 1
 -------
   5 3 *
```

(ii)
```
   8 7 6
 – * 3 *
 -------
   6 * 7
```

(iii)
```
   5 3 7 6
 – * * 5 9
 ---------
   2 5 * *
```

(iv)
```
   1 0 0 0 0 0 0
 –     * * * * 1
 ---------------
     * 4 3 2 0 *
```

8. सात अंकों की सबसे बड़ी तथा आठ अंकों की सबसे छोटी संख्याओं का अन्तर ज्ञात कीजिए।

9. कबीर ने अपने बचत खाते में 25000रु जमा किए। बाद में उसने 5425रु निकाल लिए। उसके खाते में कितनी राशि बची?

10. एक गाँव की जनसंख्या 1500 है। यदि उसमें से 489 पुरूष तथा 472 स्त्रियाँ है, तो बच्चों की संख्या ज्ञात कीजिए।

11. गोरांग के पास 61000 रु थे। उसने 8750 रु अशोक को, 12638 रु अकबर को तथा 35000 रु एन्थनी को दे दिए। उसके पास कितनी राशि शेष बची?

12. एक जादुई वर्ग (Magic Square) में कुछ संख्याओं को इस प्रकार व्यवस्थित करके लिखा जाता है कि प्रत्येक पंक्ति, स्तंभ और विकर्ण की संख्याओं का योग समान होता है। उदाहरणार्थ, निम्न जादुई वर्ग में संख्याओं 1, 2, 3, ...,9 को

इस प्रकार व्यवस्थित करके लिखा गया है कि

$$8+1+6 = 3+5+7 = 4+9+2$$
$$= 8+3+4 = 1+5+9 = 6+7+2$$
$$= 8+5+2 = 6+5+4 = 15$$

8	1	6
3	5	7
4	9	2

निम्न जादुई वर्ग में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

	8	13
	12	
11		

13. छूटी हुई संख्याओं को लिख कर निम्न जादुई वर्ग को पूरा कीजिए :

1	14	15	
8	11		
		6	9
13			16

14. रिक्त स्थानों को भर कर निम्न जादुई वर्ग को पूर्ण कीजिए:

22		6	13	20
	10	12	19	
9	11	18	25	
15	17			
16			7	14

1.8 पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएँ गुणन

पूर्ण संख्याओं पर की जाने वाली एक और संक्रिया हैं गुणन। हम जानते हैं कि दो संख्याओं को गुणा किस प्रकार किया जाता है। हम यह भी जानते हैं कि

गुणा (गुणन) का अर्थ है बार-बार जोड़ना। उदाहरणार्थ, $3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$। अत: गुणन का प्रथम गुण स्वाभाविक रूप से सत्य है।

गुण I : ***यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हैं तथा $a \times b = c$ है, तो c भी एक पूर्ण संख्या है।***

कुछ संख्याएँ लेकर हम इस गुण को स्पष्ट कर सकते हैं।

$$9 \times 11 = 99$$
$$10 \times 121 = 1210$$
$$0 \times 100 = 0$$

इन सभी उदाहरणों में दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल एक पूर्ण संख्या ही है।

आइए, संख्याओं 4 व 7 पर विचार करें। गुणनफल $4 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$ है। इसी प्रकार, गुणनफल $7 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28$ है। अत: 4 को 7 से गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है जो 7 को 4 से गुणा करने पर प्राप्त होती है। इसी प्रकार, हम देख सकते हैं कि

$$101 \times 389 = 389 \times 101$$
$$0 \times 5 = 5 \times 0$$
$$1 \times 99 = 99 \times 1$$

अत: योग के समान ही गुणा करने में भी संख्याओं का क्रम महत्त्वपूर्ण नहीं है। चाहे a को b से गुणा करें अथवा b को a से गुणा करें एक ही संख्या प्राप्त होगी। हम इस गुण को निम्न प्रकार लिखते हैं :

गुण II: ***यदि a तथा b दो पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a \times b = b \times a$ होता है।***

मान लीजिए हमारे पास तीन पूर्ण संख्याएँ 4, 6 व 9 हैं। यदि हम 4 व 6 को गुणा करें, तथा इस प्रकार प्राप्त गुणनफल (24) व 9 को गुणा करें, तो हमें $(4 \times 6) \times 9 = 24 \times 9 = 216$ प्राप्त होता है। दूसरी ओर यदि 4 तथा 6 व 9 के गुणनफल को गुणा करें, तो हमें प्राप्त होता है:

$$4 \times (6 \times 9) = 4 \times 54 = 216$$

इस प्रकार प्राप्त दोनों संख्याएँ समान हैं। इसी प्रकार, हम देखते हैं कि

$$(12 \times 28) \times 73 = 12 \times (28 \times 73) = 24528$$

वास्तव में, हमें गुणन का निम्नलिखित गुण प्राप्त है:

गुण III: ***यदि a, b व c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ होता है।***

गुण III में प्राप्त समान संख्या को $a \times b \times c$ से प्रदर्शित करते हैं। योग के समान ही गुणन के गुण II के प्रयोग से हम देख सकते हैं कि संख्याएँ $a \times b \times c$, $a \times c \times b$, $c \times b \times a$, $b \times c \times a$, $c \times a \times b$ व $b \times a \times c$ सभी एक ही पूर्ण संख्या प्रकट करते हैं। गुणन के इस गुण को हम परिकलनों को सरल करने में प्रयोग करते हैं। यदि हमारे पास गुणा करने के लिए दो से अधिक संख्याएँ हैं, तो हम पहले किन्हीं भी दो संख्याओं का गुणा कर सकते हैं। उसके बाद शेष बची संख्याओं में से एक संख्या लेकर पिछले गुणनफल से गुणा करते हैं। इस प्रक्रिया को हम तब तक बार–बार करते हैं जब तक सभी संख्याओं का गुणनफल प्राप्त न हो जाए। इस प्रक्रिया में हम संख्याओं का चयन इस प्रकार करते हैं जिससे गुणन की संक्रिया सरलता से की जा सके। इस प्रक्रिया को हम एक उदाहरण से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 2: 8, 69 व 125 का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल: हम पहले 8 व 125 को गुणा करते हैं। उसके बाद हम प्राप्त गुणनफल को 69 से गुणा करते हैं। अत:

$$(8 \times 125) \times 69 = 1000 \times 69 = 69000$$

हम यही गुणनफल $(8 \times 69) \times 125$ तथा $8 \times (69 \times 125)$ द्वारा भी प्राप्त कर सकते हैं। गुणा करने का कौन सा क्रम सर्वाधिक सुविधाजनक है?

उदाहरण 3: संख्याओं 16, 80, 25 व 15237 का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल: हम गुणनफल निम्न प्रकार प्राप्त करते हैं:

$$[(80 \times 25) \times 15237] \times 16$$
$$= (2000 \times 15237) \times 16$$
$$= 30474000 \times 16$$
$$= 487584000$$

गुणन की संक्रिया में संख्या 1 का वही महत्व है जो योग की संक्रिया में शून्य का होता है। हम जानते हैं कि $1 \times 8 = 8$, $79 \times 1 = 79$
इस प्रकार के गुण वाली 1 अकेली संख्या है।

गुण IV: ***सभी पूर्ण संख्याओं b के लिए $1 \times b = b \times 1 = b$ होता है। पूर्ण संख्या 1 इस प्रकार के गुण वाली अकेली पूर्ण संख्या है।***

गुणन संक्रिया के परिपेक्ष में संख्या शून्य का भी एक विशेष गुण है। हम जानते हैं कि $3 \times 0 = 0$, $0 \times 100 = 0$, $357692 \times 0 = 0$ है।

गुण V : ***प्रत्येक पूर्ण संख्या b के लिए $0 \times b = b \times 0 = 0$ होता है। शून्य इस गुण वाली अकेली पूर्ण संख्या है।***

अब हम गुणन के एक और महत्वपूर्ण गुण पर विचार करेंगे। यह गुण योग व गुणन संक्रियाओं में एक संबंध स्थापित करता है। एक बड़ा गुणनफल छोटे-छोटे गुणनफलों के योग के रूप मे लिखा जा सकता है। संख्याओं 3, 5 व 8 पर विचार करें। पहले हम 5 व 8 का योग करते हैं, फिर इस योग को 3 से गुणा करते हैं। अर्थात्

$$3 \times (5 + 8) = 3 \times 13 = 39$$

इस प्रकार हमें 39 प्राप्त होता है। अब हम 5 व 8 को 3 से अलग-अलग गुणा कर के फिर गुणनफलों का योग करते हैं। इस प्रकार

$$3 \times 5 + 3 \times 8 = 15 + 24 = 39$$

इस प्रकार भी हमें 39 प्राप्त होता है। अतः हम देखते हैं कि

$$3 \times (5 + 8) = 3 \times 5 + 3 \times 8$$

इसी प्रकार, हम देखते हैं कि

$$(7 + 13) \times 5 = 20 \times 5 = 100,$$

और $$7 \times 5 + 13 \times 5 = 35 + 65 = 100$$

यहाँ भी हम देखते हैं कि पहले जोड़ने और बाद में गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है जो पहले अलग-अलग गुणा करने और बाद में जोड़ने पर प्राप्त होती है।

गुण VI : ***यदि a, b, c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ तथा $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$ होता है।***

यदि दो के स्थान पर तीन या अधिक संख्याओं का योग है, तब भी यह गुण लागू होता है। इस प्रकार

$$a \times (b + c + d) = a \times b + a \times c + a \times d$$

$$(a + b + c + d) \times p = a \times p + b \times p + c \times p + d \times p$$ इत्यादि।

यदि योग के स्थान पर व्यवकलन है, तो क्या होगा? पुनः 3, 5 व 8 पर विचार करें।

$$3 \times (8 - 5) = 3 \times 3 = 9, \text{ तथा}$$

$$3 \times 8 - 3 \times 5 = 24 - 15 = 9$$

इसी प्रकार,

$(13 - 7) \times 5 = 6 \times 5 = 30$ तथा

$13 \times 5 - 7 \times 5 = 65 - 35 = 30$

इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है:

गुण VII: ***यदि $a, b,$ व c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं तथा $b > c$ है, तब***

$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$, तथा

$(b - c) \times a = b \times a - c \times a$ होता है।

गुण VI व VII परिकलनों के सरलीकरण में बहुत सहायक होते हैं।

उदाहरण 4: 57×35 का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$
\begin{aligned}
57 \times 35 &= (50 + 7) \times 35 \\
&= 50 \times 35 + 7 \times 35 \\
&= 1750 + 245 \\
&= 1995
\end{aligned}
$$

उपर्युक्त गुणनफल निम्न प्रकार भी प्राप्त किया जा सकता है:

$$
\begin{aligned}
57 \times 35 &= (60 - 3) \times 35 \\
&= 60 \times 35 - 3 \times 35 \\
&= 2100 - 105 \\
&= 1995
\end{aligned}
$$

उदाहरण 5: 375 को 84 से गुणा कीजिए।

हल:

$$
\begin{aligned}
375 \times 84 &= (300 + 70 + 5) \times 84 \\
&= 300 \times 84 + 70 \times 84 + 5 \times 84 \\
&= 25200 + 5880 + 420 \\
&= 31500
\end{aligned}
$$

हम जानते हैं कि $7 > 5$ है। 7 व 5 को 3 से गुणा करने पर, हमें क्रमशः 21 तथा 15 प्राप्त होते हैं तथा $21 > 15$ है। आइए दूसरा उदाहरण लें। $215 > 197$ है। दोनों को 5 से गुणा करने पर, $215 \times 5 = 1075$ तथा $197 \times 5 = 985$ प्राप्त होते हैं। हम जानते हैं कि $1075 > 985$ है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं:

गुण VIII : **यदि a, b, c पूर्ण संख्याएँ हैं, $a > b$ व $c \neq 0$ है, तब a $a \times c > b \times c$ होता है।**

प्रश्नावली 1.3

1. निम्न कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों में पूर्ण संख्याएँ भरिए:
   - (i) $15379 \times 0 =$ ----------
   - (ii) $675 \times 47 = 47 \times$ ----------
   - (iii) $3709 \times 1 =$ ----------
   - (iv) $10 \times 100 \times$ ---------- $= 10000$
   - (v) $42 \times 18 \times 15 = 18 \times$ -------------- $\times 42$

2. उपयुक्त क्रम लेकर गुणा कीजिए:
   - (i) $2 \times 1735 \times 50$
   - (ii) $4 \times 25 \times 166$
   - (iii) $8 \times 291 \times 125$
   - (iv) $279 \times 625 \times 16$
   - (v) $285 \times 5 \times 60$
   - (vi) $125 \times 40 \times 8 \times 25$

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:
   - (i) $45 \times 36 = 45 \times 30 + 45 \times$ --------------
   - (ii) $27 \times 18 = 27 \times 9 + 27 \times 5 + 27 \times$ ----------
   - (iii) $12 \times 45 = 12 \times 50 - 12 \times$ ------------
   - (iv) $66 \times 85 = 66 \times 90 - 66 \times$ --------------

4. कोई भी दो विषम पूर्ण संख्याएँ चुनिए। क्या इनका गुणनफल एक विषम पूर्ण संख्या है? क्या यह किन्ही भी दो विषम पूर्ण संख्याओं के लिए सत्य है?

5. क्या दो सम पूर्ण संख्याओं का गुणनफल सदैव एक सम पूर्ण संख्या होता है? (आपको याद होगा कि एक प्राकृत संख्या सम होती है जब वह 2 से विभाज्य हो। इसी प्रकार, एक पूर्ण संख्या सम होगी यदि वह 2 से विभाज्य हो। इस प्रकार सभी सम प्राकृत संख्याएँ सम पूर्ण संख्याएँ हैं। साथ ही, चूँकि $0 = 2 \times 0$ है, इसलिए 0 संख्या 2 से विभाज्य है और इस प्रकार एक सम पूर्ण संख्या है।)

6. क्या एक सम पूर्ण संख्या तथा एक विषम पूर्ण संख्या का गुणनफल एक विषम पूर्ण संख्या होता है?

7. हम जानते हैं कि $0 + 0 = 0$ है। क्या ऐसी कोई और पूर्ण संख्या p है जिसके लिए $p + p = p$ है ?

8. हम जानते हैं कि $0 \times 0 = 0$ है। क्या ऐसी कोई और पूर्ण संख्या q है जिसके लिए $q \times q = q$ है ?

9. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य हो, तो इन संख्याओं के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

10. गुणन के गुण VI का प्रयोग करते हुए, निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए:
   (i) 816×745 (ii) 2032×613
   (iii) 23701×4389 (iv) 493891×206

11. योग व गुणा के गुणों का प्रयोग करते हुए, निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए:
   (i) 736×103 (ii) 854×96
   (iii) 256×1008 (iv) 995×158

12. गुणन के गुणों का प्रयोग करते हुए, निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:
   (i) $297 \times 7 + 297 \times 3$
   (ii) $54279 \times 92 + 8 \times 54279$
   (iii) $8165 \times 169 - 8165 \times 69$
   (iv) $15625 \times 15625 - 15625 \times 5625$
   (v) $461 \times 999 + 461$
   (vi) $887 \times 10 \times 461 - 361 \times 8870$
   (vii) $15 \times 579 \times 6 - 16 \times 579 \times 5$
   (viii) $16 \times 739 \times 7 - 12 \times 739$
   (ix) $3845 \times 5 \times 782 + 769 \times 25 \times 218$
   (x) $36 \times 583 + 17 \times 583 - 48 \times 583 - 5 \times 583$

13. चार अंकों की अधिकतम संख्या को तीन अंकों की न्यूनतम संख्या से गुणा कीजिए।

14. एक दुकानदार ने 125 रंगीन टी.वी. खरीदे। यदि प्रत्येक टी.वी. का मूल्य 9820रु है, तो इन सभी टी.वी. का कुल मूल्य ज्ञात कीजिए।

15. $n = 10, 15$ तथा 20 एक-एक करके लेकर संबंध

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

की सत्यता की जाँच कीजिए। n के कुछ और मान भी लीजिए। क्या यह संबध इन मानों के लिए भी सत्य है?

16. $a = 89$ तथा $b = 1$ लेकर संबंध

$$(a + b) \times (a - b) = a \times a - b \times b$$

की जाँच कीजिए। a तथा b के कुछ और मान लेकर भी इस संबंध की जाँच कीजिए।

17. $a = 100$ के लिए संबंध

$a \times a \times a - 1 = (a - 1) \times (a \times a + a + 1)$

को सत्यापित कीजिए। a के कुछ और मान भी लीजिए। क्या यह संबंध इन मानों के लिए भी सत्य है?

18. $a = 200$ लेकर दिखाइए कि

$a \times a \times a + 1 = (a + 1) \times (a \times a - a + 1)$

a के कुछ और मान लीजिए। क्या यह संबंध अब भी सत्य है?

पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएँ-विभाजन

हम जानते हैं कि एक संख्या का दूसरी संख्या से विभाजन किस प्रकार किया जाता है। यदि a व b दो संख्याएँ हैं और हम $a \div b$ ज्ञात करते हैं, तो हमें दो संख्याएँ q जिसे ***भागफल*** *(quotient)* कहते हैं, तथा r जिसे ***शेष*** *(remainder)* कहते हैं, प्राप्त होती हैं। उदाहरणार्थ, यदि हम 7 को 3 से विभाजित करें, तो भागफल 2 तथा शेष 1 प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार, हम कुछ और पूर्ण संख्याएँ लेकर भागफल तथा शेष प्राप्त करते हैं।

	a	$\div$	b	भागफल q	शेष r
(i)	8		3	2	2
(ii)	10		2	5	0
(iii)	13		15	0	13
(iv)	121		11	11	0

जब शेष शून्य है तब हम कहते हैं कि b संख्या a को पूर्ण रूप से विभाजित करती है तथा $a \div b$ एक पूर्ण संख्या अर्थात् भागफल q प्रदर्शित करता है। जैसे उदाहरणों (ii) व (iv) में $10 \div 2 = 5$, $121 \div 11 = 11$ है। शेष उदाहरणों, अर्थात् (i) व (iii) में $a \div b$ एक पूर्ण संख्या प्रदर्शित नहीं करता। अतः हम कह सकते हैं कि

गुण I: ***यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a \div b$ एक पूर्ण संख्या हो भी सकती है और नहीं भी।***

इस प्रकार योग अथवा गुणन का गुण I विभाजन के लिए सत्य नहीं है।

जिस प्रकार गुणन का अर्थ बार-बार जोड़ना भी होता है, उसी प्रकार भाग देने का अर्थ बार-बार घटाना भी होता है। निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए:

15	13
− 5 पहली बार	− 4 पहली बार
10	9
− 5 दूसरी बार	− 4 दूसरी बार
5	5
− 5 तीसरी बार	− 4 तीसरी बार
0	1
इस प्रकार $15 \div 5 = 3$, जो एक पूर्ण संख्या है।	इस प्रकार $13 \div 4$ एक पूर्ण संख्या नहीं है।

इस प्रक्रिया में हम तब तक घटाते जाते हैं जब तक हमे शून्य अथवा घटाए जाने वाली संख्या से छोटी संख्या प्राप्त नहीं हो जाती। यदि हम शून्येतर संख्या b से शून्य को बार-बार घटाएँ, तो प्रत्येक बार संख्या b ही प्राप्त होगी। हम कभी भी शून्य अथवा शून्य से कम संख्या प्राप्त नहीं कर पाएँगे। उदाहरणार्थ $10 \div 0$ लेने पर, हम देखते हैं कि

10
− 0 पहली बार
10
− 0 दूसरी बार
10
− 0 तीसरी बार
10

दूसरे शब्दों में, शून्य से भाग देना एक सार्थक संक्रिया नहीं है। हम इसे गुण के रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं:

गुण II: ***शून्य से विभाजन एक अर्थहीन संक्रिया है।***

जिस प्रकार जोड़ना तथा घटाना एक-दूसरे की विपरीत संक्रियाएँ हैं, उसी प्रकार गुणन और भाग भी एक-दूसरे की विपरीत संक्रियाएँ हैं। उदाहरणत:

$6 \div 3 = 2$ है, और $2 \times 3 = 6$ है,

$6 \div 2 = 3$ है, और $3 \times 2 = 6$ है,

$24 \div 8 = 3$ है, और $3 \times 8 = 24$ है,

$24 \div 3 = 8$ है, और $8 \times 3 = 24$ है, आदि।

व्यापक रूप में, यदि $a \div b = c$ है, तो $c \times b = a$ होता है।

निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए:

गुणन तथ्य	संगत विभाजन तथ्य
$3 \times 5 = 15$	$15 \div 3 = 5,\ 15 \div 5 = 3$
$4 \times 7 = 28$	$28 \div 4 = 7,\ 28 \div 7 = 4$
$1 \times 2 = 2$	$2 \div 1 = 2,\ \ 2 \div 2 = 1$

ध्यान दीजिए कि दो भिन्न शून्येतर संख्याओं के एक गुणन तथ्य से दो विभाजन तथ्य प्राप्त होते हैं।

व्यापक संदर्भ में,

यदि $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ हो और $a \times b = c$ है, तो $c \div a = b$ और $c \div b = a$ होता है। इस प्रकार हमें निम्न प्राप्त होता है:

गुण III: ***मान लीजिए a, b व c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं और b व c दोनों शून्येतर पूर्ण संख्याएँ हैं।***

(i) यदि $a \div b = c$ हो, तो $b \times c = a$ होगा, तथा

(ii) यदि $b \times c = a$ हो, तो $a \div c = b$ व $a \div b = c$ होगा।

गुणन तथा भाग की संक्रियाओं के इन संबंधों के द्वारा हम विभाजन के कुछ ज्ञात गुणों की सत्यता की जाँच कर सकते हैं। इस प्रकार,

$3 \times 1 = 3,\ 10 \times 1 = 10,\ 69 \times 1 = 69$, आदि से हमें क्रमश: प्राप्त होता है कि $3 \div 3 = 1,\ 10 \div 10 = 1,\ 69 \div 69 = 1$ है। व्यापक रूप में,

गुण IV: ***यदि a एक शून्येतर पूर्ण संख्या है, तो $a \div a = 1$ होता है।***

इसी प्रकार, हमें प्राप्त होता है कि $3 \div 1 = 3$, $10 \div 1 = 10$, $69 \div 1 = 69$ है। व्यापक रूप में,

गुण V: ***यदि a एक पूर्ण संख्या है, तो $a \div 1 = a$ होता है।***

हम जानते हैं कि $16 \div 5$ एक पूर्ण संख्या नहीं है। इससे भागफल 3 तथा शेषफल अर्थात् शेष 1 प्राप्त होता है। साथ ही, हम जानते हैं कि

$$5 \times 3 + 1 = 16$$

इसी प्रकार, $29 \div 3$ से भागफल 9 तथा शेष 2 है और $3 \times 9 + 2 = 29$ है। इसी प्रकार, $77 \div 11$ से भागफल 7 तथा शेष 0 प्राप्त होता है तथा $77 = 11 \times 7 + 0$ है। अतः यदि किसी विभाजन संक्रिया में भाज्य a है, विभाजक (या भाजक) b है, भागफल q है तथा शेष r है, तो

$a = bq + r$ होता है, जहाँ $r = 0$ या $r < b$ है।

इस संबंध को ***विभाजन कलन विधि*** *(Division Algorithm)* या ***विभाजन का नियम*** कहते हैं।

उदाहरण 6: संख्या 45998 को 356 से विभाजित कीजिए तथा विभाजन के नियम का सत्यापन कीजिए।

हल:

```
356) 45998 (129
     356
     ----
     1039
      712
     ----
     3278
     3204
     ----
       74
```

यहाँ भागफल $q = 129$ तथा शेष $r = 74$ है।

साथ ही, $356 \times 129 + 74$

$= 45924 + 74$

$= 45998$ है। इस प्रकार विभाजन का नियम सत्यापित हो गया।

उदाहरण 7: विभाजित कीजिए:

(i) 389 को 11 से

(ii) 4621 को 34 से

तथा प्रत्येक अवस्था में विभाजन कलन विधि का सत्यापन कीजिए।

हल: (i) संख्या 389 को 11 से विभाजित करने पर, भागफल $q = 35$ तथा शेष

$r = 4$ प्राप्त होता है। साथ ही, $11 \times 35 + 4 = 385 + 4 = 389$ है।

(ii) संख्या 4621 को 34 से भाग देने पर भागफल $q = 135$ तथा शेष $r = 31$ प्राप्त होते हैं। साथ ही, $34 \times 135 + 31 = 4590 + 31 = 4621$ हैं।

●●●

प्रश्नावली 1.4

1. विभाजन कीजिए तथा भागफल एवं शेष प्राप्त कीजिए:

   (i) $7772 \div 58$ (ii) $69063 \div 35$

   (iii) $96324 \div 245$ (iv) $12345 \div 975$

   (v) $16025 \div 1000$ (vi) $92845 \div 300$

2. मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $32475 \div 1$ (ii) $0 \div 719$

   (iii) $476 + (620 \div 62)$ (iv) $694 \div (725 \div 725)$

   (v) $(1465 \div 1465) - (1465 \div 1465)$ (vi) $72450 \div (583 - 58)$

   (vii) $(15625 \div 125) \div 125$ (viii) $1400 - 200 \times (150 \div 50)$

3. 6 अंकीय न्यूनतम संख्या कौन सी है जो 75 से पूर्णत: विभाजित हो जाती है?

4. 4 अंकीय अधिकतम संख्या कौन सी है जो 40 से पूर्णत: विभाजित हो जाती है?

5. वह संख्या प्राप्त कीजिए जिसे 35 से विभाजित करने पर भागफल 20 तथा शेष 18 प्राप्त होता है।

6. एक मालिन 570 वृक्षों को 19 पंक्तियों मे रोपना चाहती है। प्रत्येक पंक्ति में वृक्षों की संख्या समान है। प्रत्येक पंक्ति में कितने वृक्ष होंगे?

7. एक नगर की जनसंख्या 450772 है। प्रत्येक 14 व्यक्तियों में एक व्यक्ति शिक्षित है। नगर में कुल मिलाकर कितने व्यक्ति शिक्षित हैं?

8. एक छविगृह का निर्माण किया जाना है जिसकी प्रत्येक पंक्ति में 36 कुर्सियाँ होनी चाहिए। 600 व्यक्तियों को एक साथ बैठा सकने के लिए न्यूनतम कितनी पंक्तियों की आवश्यकता होगी?

9. 24 रेडियो का क्रय मूल्य 18720 रु है। यदि प्रत्येक रेडियो का मूल्य समान हो, तो एक रेडियो का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

10. 1000 में से कौन सी न्यूनतम संख्या घटाई जाए जिससे प्राप्त अन्तर 30 से पूरा-पूरा विभाजित हो जाए?

11. क्या कोई पूर्ण संख्या n इस प्रकार की होती है कि $n \div n = n$ हो? क्या कोई ऐसी पूर्ण संख्या होती है जिसके लिए यह संबंध सत्य नहीं है।

12. क्या दो भिन्न शून्येतर पूर्ण संख्याओं a तथा b के लिए $a \div b = b \div a$ होता है?

13. निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?

(i) दो भिन्न शून्येतर पूर्ण संख्याओं के प्रत्येक गुणन तथ्य से दो संगत विभाजन तथ्य प्राप्त होते हैं।

(ii) यदि a एक पूर्ण संख्या है और यह दूसरी पूर्ण संख्या b, जो a से बड़ी है, द्वारा विभाजित की जाती है, तो भागफल O के बराबर नहीं हैं।

(iii) किसी भी शून्येतर पूर्ण संख्या को स्वयं से विभाजित करने पर भागफल 1 प्राप्त होता है।

(iv) तीन भिन्न पूर्ण संख्याएँ a, b, c इस प्रकार नहीं हो सकतीं कि

$$a \div (b \div c) = (a \div b) \div c \text{ हो।}$$

14. $a = 5$, 10 व 100 एक-एक करके लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(a \times a \times a - 1) \div (a - 1) = a \times a + a + 1 \text{ है।}$$

अपनी ओर से कुछ और मान लेकर इस संबंध को सत्यापित कीजिए।

15. $a = 3$, 5 व 10 एक-एक करके लेकर, संबंध

$(a \times a \times a \times a \times a - 1) \div (a - 1) = a \times a \times a \times a + a \times a \times a + a \times a + a + 1$

को सत्यापित कीजिए। अपनी ओर से a के कुछ और मान रखिए। क्या इन मानों के लिए भी यह संबंध सत्य है?

याद रखने योग्य बातें

1. न्यूनतम प्राकृत संख्या 1 है तथा न्यूनतम पूर्ण संख्या 0 है।
2. किसी प्राकृत संख्या अथवा पूर्ण संख्या का परवर्ती उस संख्या से 1 अधिक होता है।
3. प्राकृत संख्या 1 तथा पूर्ण संख्या 0 का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता। 1 के अतिरिक्त किसी प्राकृत संख्या तथा 0 के अतिरिक्त किसी पूर्ण संख्या का पूर्ववर्ती संख्या से 1 कम होता है।

पूर्ण संख्याओं a, b, c के लिए,

4. $(a + b)$ एक पूर्ण संख्या है तथा $a + b = b + a$ है।
5. $a - b$ पूर्ण संख्या हो भी सकती है, और नहीं भी हो सकती है।
6. $a - b \neq b - a$ $(a \neq b, a \neq 0, b \neq 0)$ है।
7. $a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$ होता है।
8. सामान्यत: $a - (b - c) \neq (a - b) - c$ होता है।
9. $a \times b$ एक पूर्ण संख्या है तथा $a \times b = b \times a$ होता है।
10. $a \div b$ पूर्ण संख्या हो भी सकती है तथा नहीं भी हो सकती।
11. $a \div b \neq b \div a$ $(a \neq b, a \neq 0, b \neq 0)$ है।
12. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = (a \times c) \times b$ होता है।
13. सामान्यत: $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ होता है।
14. $a + 0 = 0 + a = a - 0 = a$ होता है।
15. $a \times 0 = 0 \times a = 0$ तथा $0 \div a = 0$ $(a \neq 0)$ होता है।
16. $a \times 1 = 1 \times a = a$ होता है।
17. $a \div 1 = a$, $a \div a = 1$ $(a \neq 0)$ होता है।
18. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ तथा $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$ होता है।
19. $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$ तथा $(b - c) \times a = b \times a - c \times a$ $(b > c)$ होता है।
20. यदि a भाज्य, b भाजक, q भागफल तथा r शेष है, तो $a = bq + r$ होता है।

पूर्णांक

अध्याय 2

2.1 भूमिका

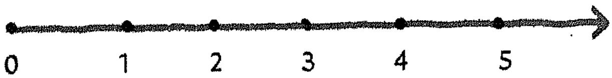
पहले अध्याय में हमने दो संख्या निकायों-प्राकृत संख्या निकाय तथा पूर्ण संख्या निकाय का अध्ययन किया। परन्तु हमारी दिन-प्रतिदिन की आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए ये संख्या निकाय अपर्याप्त हैं। पूर्ण संख्याओं के अतिरिक्त भी संख्याओं की महति आवश्यकता है। इस अध्याय में हम पूर्ण संख्या निकाय का विस्तार करेंगे तथा उसे पूर्णांकों तक ले जाएँगे। हम पूर्णांकों पर विभिन्न संक्रियाओं तथा उनके गुणों का अध्ययन करेंगे। हम पूर्णांकों के निरपेक्ष मान तथा पूर्णांकों की घात की भी चर्चा करेंगे।

2.2 पूर्णांकों की आवश्यकता

पहले अध्याय में हमने देखा कि यदि एक पूर्ण संख्या में से दूसरी पूर्ण संख्या घटाएँ, तो परिणाम का पूर्ण संख्या होना आवश्यक नहीं है। जैसे 5 में से 7 घटाने पर एक पूर्ण संख्या प्राप्त नहीं होती। इसी प्रकार 0–10, 9–100, 285397–793582 भी पूर्ण संख्याएँ नहीं हैं। अत: यह आवश्यक है कि पूर्ण संख्या निकाय का विस्तार कर इसमें तथाकथित ***ऋणात्मक संख्याओं*** का भी समावेश किया जाए। ऋणात्मक संख्याओं की आवश्यकता केवल 7–10 जैसी परिस्थितियों के लिए ही नहीं होती बल्कि वास्तविक जीवन में जहाँ भी विपरीत स्थितियाँ संबद्ध होती हैं, हम धनात्मक एवं ऋणात्मक संख्याओं का प्रयोग करते हैं। एक व्यापारी के लिए लाभ एवं हानि ऐसी ही दो विपरीत स्थितियाँ हैं। यदि लाभ धनात्मक संख्या से व्यक्त किया जाता है, तो हानि के लिए ऋणात्मक संख्या का प्रयोग किया जाएगा। पर्वत की ऊँचाई तथा घाटी की गहराई भी ऐसी ही दो विपरीत स्थितियाँ हैं। इसी प्रकार, मूल्यों का घटना-बढ़ना दो विपरीत स्थितियाँ हैं। भूमध्य रेखा (विषुवत् वृत्त)(equator) के पास के नगरों का तापमान 0^0C से अधिक होता है जिसके लिए धनात्मक संख्याओं का प्रयोग करते हैं, जबकि ध्रुवों (poles) के निकट तापमान 0^0C से नीचे होता है जिसे ऋणात्मक संख्या द्वारा व्यक्त करते हैं।

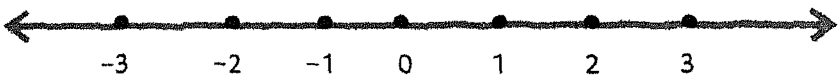
2.3 ऋणात्मक संख्याएँ

ऋणात्मक संख्या के विचार को हम निम्न प्रकार समझ सकते हैं: आइए, संख्या रेखा (आकृति 2.1) के उस भाग पर विचार केन्द्रित करें जिस पर पूर्ण संख्याएँ 0, 1, 2, 3,... आदि चिह्नित हैं।



आकृति 2.1

मान लीजिए हम बिन्दु 0 पर एक दर्पण इस प्रकार रखते हैं कि संख्या रेखा के चिह्नित भाग का प्रतिबिम्ब रेखा पर ठीक विपरीत दिशा में प्राप्त हो। इस प्रतिबिम्बित भाग पर बिन्दुओं 1, 2, 3, ... आदि के प्रतिबिम्ब बनेंगे। इस प्रतिबिम्बित भाग को बनाकर इस पर 1, 2, 3, ... आदि के प्रतिबिम्बों को क्रमशः −1, −2, −3, ... आदि से व्यक्त कीजिए (आकृति 2.2)।



आकृति 2.2

इस प्रकार हमें दोनों दिशाओं में अपरिमित विस्तार वाली एक रेखा प्राप्त होती है। बिन्दु 0 अर्थात् शून्य इस रेखा के मध्य में स्थित है। बिन्दु 0 के दाईं ओर प्राकृत संख्याएँ 1, 2, 3, ... तथा बाईं ओर इनके प्रतिबिम्ब −1, −2, −3, ... आदि स्थित हैं। यहाँ हम 1 के प्रतिबिम्ब −1 को *ऋणात्मक* (*negative*) 1, 1 का *विपरीत* (*opposite*) या *ऋण* (*minus*)1 कहते हैं। इसी प्रकार, ऋण 2, ऋण 3, ... आदि संख्याएँ प्राप्त होती हैं। संख्याओं का यह निकाय जिसमें सभी प्राकृत संख्याएँ, इनकी ऋणात्मक संख्याएँ तथा शून्य सम्मिलित हैं ***पूर्णांकों का निकाय*** (*system of integers*) कहलाता है। संख्याएँ −5, −1, 0, 2, 7, ... आदि सभी पूर्णांक कहलाते हैं। प्राकृत संख्याएँ 1, 2, 3,... आदि पूर्णांकों के रूप में *धनात्मक पूर्णांक* कहलाती हैं तथा इन्हें कभी-कभी +1, +2, +3, ... आदि से दर्शाते हैं। संख्याएँ −1, −2, −3, ... आदि सभी *ऋणात्मक पूर्णांक* कहलाती हैं। पूर्णांक के रूप में 0 न तो धनात्मक पूर्णांक है और न ही ऋणात्मक। साथ ही, चूँकि संख्या रेखा पर शून्य का प्रतिबिम्ब शून्य ही है, अतः −0 = 0 है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि

शून्य का ऋणात्मक शून्य ही है। सामान्यत: लिखते समय धनात्मक का चिह्न + छोड़ दिया जाता है। इस प्रकार 1, 5, 9, ... आदि प्राकृत संख्याएँ भी व्यक्त करते हैं तथा धनात्मक पूर्णांक भी।

2.4 ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक

कागज के एक पन्ने को लेकर उसके दोनों पृष्ठों को दो विभिन्न रंगों से रंग देते हैं। मान लीजिए ये रंग हैं लाल तथा नीला। इस पन्ने को मेज पर इस प्रकार रखते हैं कि लाल पृष्ठ ऊपर की ओर रहे। अब पन्ने को एक बार पलट कर इस प्रकार रखते हैं कि नीला पृष्ठ ऊपर आ जाए। यदि पृष्ठ पलटने की यह क्रिया फिर दोहरायी जाए, तो लाल रंग पुन: ऊपर की ओर आ जाएगा। इसी प्रकार तकिए के एक गिलाफ को पलट कर अन्दर वाला भाग बाहर कीजिए। अब यही क्रिया पुन: दोहराने पर गिलाफ अपनी पहली वाली अवस्था में आ जाएगा। इसी प्रकार का प्रयोग संख्या रेखा व दर्पण के साथ भी करते हैं। हमने ऋणात्मक संख्याओं को धनात्मक संख्याओं का प्रतिबिम्ब माना है। मान लीजिए कि बिन्दु 0 पर ही दर्पण को पलट कर ऋणात्मक संख्याओं की ओर देखते हुए रख दिया जाता है। इस स्थिति में धनात्मक पूर्णांक ऋणात्मक पूर्णांकों के प्रतिबिम्ब बन जाएँगे। अर्थात् +5, −5 का प्रतिबिम्ब बन जाएगा। हम प्रतिबिम्ब को संख्या के समक्ष − चिह्न लगाकर प्रदर्शित कर रहे हैं। अत: $+5 = -(-5)$ है। इसी प्रकार $+10 = -(-10)$ है। इन प्रयोगों से ऋणात्मक संख्याओं के बारे में एक महत्वपूर्ण तथ्य यह प्राप्त होता है कि **ऋणात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक एक धनात्मक पूर्णांक होता है**। वास्तव में, किसी भी संख्या a के लिए संबंध $-(-a) = a$ सदैव सत्य है।

यहाँ पर चिह्न '−' किसी पूर्णांक के ऋणात्मक को प्रदर्शित करने के लिए प्रयोग किया गया है। पूर्व में हम इसी चिह्न '−' को व्यवकलन संक्रिया के लिए प्रयुक्त कर चुके हैं। इस प्रकार एक ही चिह्न दो विभिन्न संक्रियाओं के लिए प्रयोग हो रहा है। यह संदर्भ से स्पष्ट हो जाता है कि इस चिह्न का अर्थ ऋणात्मक संख्या है अथवा व्यवकलन। उदाहरणार्थ जब हम कहते हैं कि किसी स्थान का तापमान -3^0C है, तो स्पष्ट है कि यहाँ कोई व्यवकलन नहीं है। दूसरी ओर जब हम 10−3 लिखते हैं, तो स्पष्ट अर्थ है '10 में से 3 को घटाना'।

2.5 किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान

संख्या रेखा पर पूर्णांक +5 पर विचार करें। यह शून्य से 5 मात्रक की दूरी पर दाईं ओर स्थित है। इसी प्रकार, पूर्णांक −5 शून्य से 5 मात्रक की दूरी पर बाईं

ओर स्थित है। पूर्णांकों +5 तथा −5 में प्रयुक्त संख्या 5 इन पूर्णांकों का ***निरपेक्ष मान (absolute value)*** कहलाती है। यदि निरपेक्ष मान को संकेत | | से प्रदर्शित करें, तो हम देखते हैं कि $|+5| = 5$ तथा $|-5| = 5$ है। **किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान चिह्न पर बिना ध्यान दिए उस पूर्णांक का संख्यात्मक मान होता है।** इस प्रकार किसी संख्या का निरपेक्ष मान या तो शून्य होगा अन्यथा धनात्मक। यह कभी भी ऋणात्मक नहीं होता है। उदाहरणार्थ $|+9| = 9, |-8| = 8, |0| = 0, |-109| = 109$, आदि।

1.6 पूर्णांकों का क्रम

याद कीजिए कि संख्या रेखा पर यदि संख्या a संख्या b के बाईं ओर स्थित है, तो हम लिखते हैं $a < b$ और कहते हैं a संख्या b से छोटी है। इसी प्रकार, यदि b संख्या a के दाईं ओर स्थित है, तो हम लिखते हैं $b > a$ और कहते हैं कि b संख्या a से बड़ी है। साथ ही, हम जानते हैं कि '$a < b$' का अर्थ वही है जो '$b > a$' का है। उदाहरण के लिए हम लिख सकते हैं।

$2 > 1$ या $1 < 2$; $3 > 0$ या $0 < 3$; $-5 < -3$ या $-3 > -5$; $-9 < 10$ या $10 > -9$; $0 > -100$ या $-100 < 0$ आदि।

यहाँ से हमें निम्न परिणाम भी प्राप्त होते हैं:

(i) प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(ii) शून्य प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा तथा प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(iii) यदि पूर्णांक a **पूर्णांक** b से छोटा है, तो पूर्णांक $-a$ **पूर्णांक** $-b$ से बड़ा होगा। हम जानते हैं कि संख्या रेखा पर यदि b पूर्णांक a के दाईं ओर स्थित है, तो b का प्रतिबिम्ब $-b$ पूर्णांक a के प्रतिबिम्ब $-a$ के बाईं ओर स्थित होगा। उदाहरणार्थ:

$3 > 1, -3 < -1; -3 > -5, 3 < 5; 2 > -4, -2 < 4$ आदि।

संख्या रेखा पर हम यह भी देखते हैं कि पूर्णांक −3, पूर्णांक −4 का परवर्ती है; −5 पूर्णांक −4 का पूर्ववर्ती है; 0, −1 का परवर्ती है, आदि।

प्रश्नावली 2.1

1. विपरीत बताइए:
   - (i) जनसंख्या में वृद्धि
   - (ii) बैंक में धन जमा करना
   - (iii) धन कमाना
   - (iv) पूर्व दिशा में जाना
   - (v) तापमान का गिरना
   - (vi) 200 ईसा पूर्व

2. पूर्णांकों के प्रयोग द्वारा निम्न को प्रदर्शित कीजिए:
   - (i) शून्य से 3^0C ऊपर
   - (ii) शून्य से 5^0C नीचे
   - (iii) किसी खाते से 25रु निकालना
   - (iv) 100 रु की हानि
   - (v) 3 गोल से जीत
   - (vi) समुद्र तल से 16 मीटर ऊपर

3. निम्न संख्या युग्मों में कौन सी संख्या, संख्या रेखा पर, दूसरी संख्या के दाईं ओर स्थित है?
   - (i) 1, 7
   - (ii) −2, −5
   - (iii) 0, −3
   - (iv) −5, 8

4. निम्न युग्मों में कौन सी संख्या दूसरी से छोटी है?
   - (i) 8, −8
   - (ii) 0, −12
   - (iii) −15, −5
   - (iv) 318, −356

5. निम्न के बीच के सभी पूर्णांक लिखिए:
   - (i) −5 और 2
   - (ii) 0 और 4
   - (iii) −4 और 4
   - (iv) −7 और 0

6. निम्न में प्रत्येक '*' को $<$ या $>$ से प्रतिस्थापित कीजिए ताकि कथन सत्य हो जाए:
   - (i) 0 * 5
   - (ii) −7 * −17
   - (iii) −3 * 0
   - (iv) −81 * 18
   - (v) −13 * 13
   - (vi) −253 * −523

7. निम्न में से प्रत्येक का निरपेक्ष मान लिखिए :
   - (i) 17
   - (ii) −23
   - (iii) 0
   - (iv) −107
   - (v) −245
   - (vi) 1024

8. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) सबसे छोटा पूर्णांक शून्य है।

(ii) –18 बड़ा है –5 से।

(iii) एक धनात्मक पूर्णांक अपने ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(iv) शून्य एक पूर्णांक नहीं है, क्योंकि यह न तो धनात्मक है और न ऋणात्मक।

(v) किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान उस पूर्णांक से सदैव बड़ा होता है।

(vi) –297 का परवर्ती –298 है।

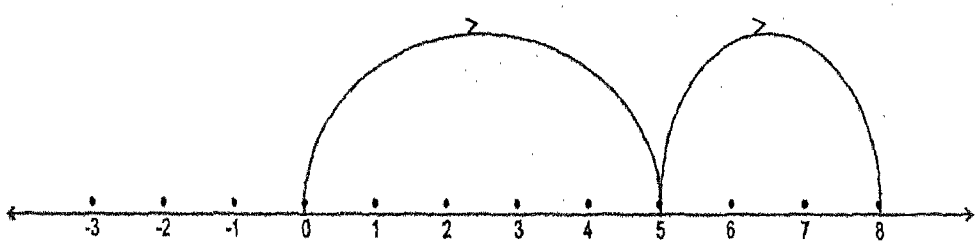
(vii) –193 का पूर्ववर्ती –194 है।

2.7 पूर्णांकों का योग

दो पूर्ण संख्याओं का योग ज्ञात करना हम सीख चुके हैं। हम जानते हैं कि पूर्णांक का निरपेक्ष मान एक पूर्ण संख्या होती है। हम योग ज्ञात करने की प्रक्रिया को संख्या रेखा की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

2.7.1 दो धनात्मक पूर्णांकों का योग

मान लीजिए कि हमें +5 तथा +3 का योग ज्ञात करना है।

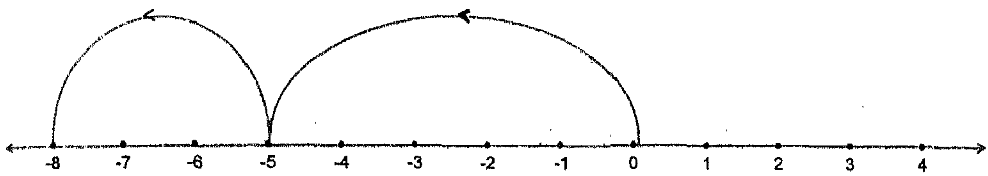


आकृति 2.3

पहले हम संख्या रेखा पर शून्य के दाईं ओर 5 पग चल कर +5 अर्थात् 5 पर पहुँचते हैं। फिर हम +5 के दाईं ओर 3 पग चल कर +8 पर पहुँचते हैं (आकृति 2.3)। इस प्रकार (+5) + (+3) = +8, अर्थात् 8 है।

2.7.2 दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग

अब मान लीजिए हमें (–5) + (–3) ज्ञात करना है।



आकृति 2.4

पहले हम संख्या रेखा पर 0 के बाईं ओर 5 पग चल कर −5 पर और फिर −5 के बाईं ओर 3 पग चल कर − 8 पर पहुँचते हैं (आकृति 2.4)। इस प्रकार, $-5+(-3) = -8$ है।

अनुच्छेदों 2.7.1 तथा 2.7.2 में स्पष्ट की गई दोनों प्रक्रियाओं को निम्न प्रकार समझा जा सकता है:

मान लीजिए **हमें दो पूर्णांकों a तथा b का योग $a + b$ ज्ञात करना है।**

I. यदि a तथा b दोनों धनात्मक अथवा दोनों ऋणात्मक हैं, तो हम दोनों के निरपेक्ष मानों $|a|$ व $|b|$ का योग प्राप्त करते हैं तथा योग में a व b का चिह्न लगा देते हैं। अर्थात्

$a + b = +(|a| + |b|)$, *यदि a व b दोनों धनात्मक हैं*

$a + b = -(|a| + |b|)$, *यदि a व b दोनों ऋणात्मक हैं।*

उदाहरण 1: निम्न का योग ज्ञात कीजिए:

(1) 29 व 70 (ii) − 37 व − 42

हल:

(i) $29 + 70 = +(|29| + |70|)$

$= +(29 + 70)$

$= +99 = 99$

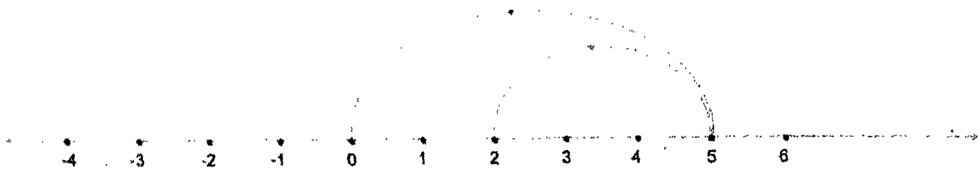
(ii) $(-37) + (-42) = -(|-37| + |-42|)$

$= -(37 + 42)$

$= -79$

[illegible]

मान लीजिए कि हम +5 तथा –3 का योग ज्ञात करना चाहते हैं।

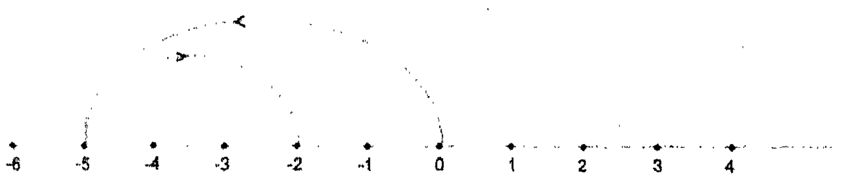


आकृति 2.5

पहले हम शून्य के दाईं ओर 5 पग चलते हैं और 5 पर पहुँचते हैं। इसके पश्चात 5 के बाईं ओर 3 पग चलते हैं और 2 पर पहुँचते हैं (आकृति 2.5)। इस प्रकार

$$(+5) + (-3) = 2$$

इसी प्रकार, –5 व +3 का योग ज्ञात करने के लिए, हम संख्या रेखा पर पहले शून्य के बाईं ओर 5 पग चल कर –5 पर पहुँचते हैं और फिर –5 के दाईं ओर 3 पग चल कर –2 पर पहुँचते हैं (आकृति 2.6)।



आकृति 2.6

इस प्रकार,

$$(-5) + (+3) = -2$$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं:

II. *यदि पूर्णांक a व b विपरीत चिह्नों वाले हैं, तो $a + b$ ज्ञात करने के लिए, हम इनके निरपेक्ष मानों का अन्तर ज्ञात करते हैं तथा इस अन्तर में बड़े निरपेक्ष मान वाले पूर्णांक का चिह्न लगा देते हैं।*

[illegible] योग ज्ञात कीजिए:

(i) 29 व –70 (ii) –37 व 42

हल: (i) $|29| = 29$ तथा $|-70| = 70$

यहाँ संख्या –70 का निरपेक्ष मान बड़ा है और इसका चिह्न '–' है।

अत: $(29) + (-70) = -(70-29)$

$= -41$

(ii) $|-37| = 37$ तथा $|42| = 42$

यहाँ संख्या 42 का निरपेक्ष मान बड़ा है और इसका चिह्न '+' है।

अत: $(-37) + (42) = +(42-37)$

$= +5 = 5$

2.7.4 योग संक्रिया के गुण

अब हम योग संक्रिया के कुछ गुणों की विवेचना करेंगे। हम देखते हैं कि

(i) $2 + (-9) = -7$, जो एक पूर्णांक है।

(ii) $-17 + (-8) = -25$, जो एक पूर्णांक है।

(iii) $-29 + (+36) = 7$, जो एक पूर्णांक है।

इस प्रकार हमें योग का पहला गुण प्राप्त होता है जो निम्न है:

गुण I: ***दो पूर्णांकों का योग एक पूर्णांक ही होता है।***

अब, हम देखते हैं कि

(i) $5+(-3) = 2$ और $(-3)+5 = 2$

(ii) $(-8)+8 = 0$ और $8+(-8) = 0$

अर्थात् पूर्णांकों को किसी भी क्रम में जोड़ने पर योग समान ही प्राप्त होता है। इस प्रकार, हमें योग का दूसरा गुण प्राप्त होता है जो निम्न है:

गुण II: ***सभी पूर्णांकों a व b के लिए $a + b = b + a$ होता है।***

अब हम निम्नलिखित पर विचार करेंगे:

(i) $3 + [(-2) + (-5)] = 3 + (-7) = -4$, तथा

$[3 + (-2)] + (-5) = 1 + (-5) = -4$

(ii) $(-1) + [4 + (-4)] = (-1) + 0 = -1$, तथा

$[(-1) + (4)] + (-4) = 3 + (-4) = -1$

(iii) $6 + [(-7) + (+3)] = 6 + (-4) = 2$, तथा

$[6 + (-7)] + (+3) = -1 + (+3) = 2$

उपर्युक्त उदाहरणों से हमें निम्न गुण प्राप्त होता है:

गुण III : *सभी पूर्णांकों a, b व c के लिए*

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ होता है।}$$

गुणों II व III के कारण हम कह सकते हैं कि तीन या अधिक पूर्णांकों का योग पूर्णांकों के क्रम पर निर्भर नहीं करता।

पूर्णांक शून्य के बारे में हम देखते हैं कि

(i) $3 + 0 = 0 + 3 = 3$

(ii) $(-7) + 0 = 0 + (-7) = -7$

अर्थात् हमें प्राप्त है :

गुण IV : *0 इस प्रकार का पूर्णांक है कि किसी भी पूर्णांक a के लिए*

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ होता है।}$$

हम जानते हैं कि $18 > 7$ है। 18 तथा 7 दोनों में -5 जोड़ने पर हमें $18 + (-5) = 13$ तथा $7 + (-5) = 2$ प्राप्त होते हैं और हम जानते हैं कि $13 > 2$ है। अर्थात्,

$$18 + (-5) > 7 + (-5)।$$

एक दूसरा उदाहरण लेते हैं। हम जानते हैं कि $-3 < 9$। दोनों में 6 जोड़ने पर, हमें $-3 + 6 = 3$ तथा $9 + 6 = 15$ प्राप्त होते हैं। यहाँ भी $3 < 15$, अर्थात् $-3 + 6 < 9 + 6$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार हमें एक गुण और प्राप्त होता है:

गुण V: *पूर्णांकों a, b और c के लिए यदि $a > b$, तो*

$a + c > b + c$ ***होता है;***

और यदि $a < b$, ***तो*** $a + c < b + c$ ***होता है।***

उदाहरण 3: 1, – 476, – 229, 800 और 369 का योग ज्ञात कीजिए।

हल : $1 + (-476) + (-229) + 800 + 369$

$$= [1 + (-476)] + (-229) + 800 + 369$$

$$= [-475 + (-229)] + 800 + 369$$

$$= [-704 + 800] + 369$$

$$= 96 + 369$$

$$= 465$$

तीन या तीन से अधिक धनात्मक एवं ऋणात्मक संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित प्रक्रिया भी अपना सकते हैं:

चरण 1: सभी धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ कर एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त करें।

चरण 2: सभी ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ कर एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त करें।

चरण 3: चरण 1 में प्राप्त धनात्मक पूर्णांक व चरण 2 में प्राप्त ऋणात्मक पूर्णांक का योग दो पूर्णांकों के योग की विधि से प्राप्त करें।

उदाहरण 4: $(-10) + 92 + 84 + (-15)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $(-10) + 92 + 84 + (-15)$

$$= [92 + 84] + [(-10) + (-15)]$$

$$= 176 + (-25)$$

$$= 151$$

●●●

प्रश्नावली 2.2

1. एक संख्या रेखा खींचिए और उस पर निम्न में से प्रत्येक को निरूपित कीजिए:

(i) $-6 + 8$ (ii) $5 + (-9)$

(iii) $-3 + (-8)$ (iv) $-1 + (-2) + 2$

(v) $-2 + 7 + (-8)$ (vi) $-2 + (-3) + (-5)$

2. संख्या रेखा का प्रयोग कर वह पूर्णांक लिखिए जो

(i) 3 से 4 अधिक है (ii) 2 से 5 कम है

(iii) –9 से 8 अधिक है (iv) –3 से 7 कम है

3. निम्न में से प्रत्येक में दिए गए पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए:

(i) –245, 111 (ii) 2567, –3

(iii) 10001, –2 (iv) – 99005, 360

(v) – 498, –320 (vi) – 8994, 0

(vii) 3003, – 999 (viii) 2884, –2884

(ix) 2547, – 2548 (x) – 623, –5832, 623

(xi) – 982, 1934, –18, – 2034 (xii) – 4329, 4648, 4371

4. योग ज्ञात कीजिए:

(i) $100 + (-66) + (-34)$

(ii) $1262 + (-366) + (-962) + 566$

(iii) $908 + (-8) + (-1) + 1 + (-300)$

(iv) $-391 + (-81) + 9 + (-18)$

(v) $373 + (-245) + (-373) + 145 + 3000$

(vi) $1 + (-475) + (-475) + (-475) + (-475) + 1900$

(vii) $1000 + 514 + (-517) + (-999)$

(viii) $1024 + 512 + (-256) + (-128) + 64$

(ix) $(-243) + 27 + (-9) + 729 + (-1)$

(x) $(-1) + (-304) + 304 + 304 + (-304) + 1$

5. एक ऐसा पूर्णांक a ज्ञात कीजिए कि

(i) $1 + a = 0$ हो (ii) $a + 7 = 0$ हो

(iii) $-4 + a = 0$ हो (iv) $a + (-8) = 0$ हो

(v) $5 + a = 0$ हो (vi) $a + 0 = 0$ हो

6. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) एक पूर्णांक और उसके ऋणात्मक का योग शून्य होता है।

(ii) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

(iii) एक ऋणात्मक पूर्णांक और एक धनात्मक पूर्णांक का योग सदैव एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

(iv) तीन भिन्न पूर्णांकों का योग कभी भी शून्य नहीं हो सकता।

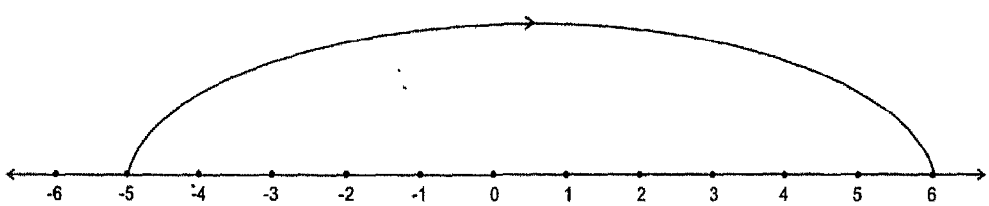
(v) क्योंकि $-4 < -3$ है, अतः $|-4| < |-3|$ होगा ।

(vi) $|4-3| = |4| + |-3|$

2.8 पूर्णांकों का व्यवकलन

हम जानते हैं कि व्यवकलन संक्रिया योग की विपरीत संक्रिया है। हम देख चुके हैं कि यदि $a - b = c$ हो, तो $b + c = a$ होता है। इस अंतर c को ज्ञात करने के लिए, हम संख्या रेखा पर b से प्रारंभ कर पग गिनते हुए a तक पहुँचते हैं। b से a तक गिने गए इन पगों की संख्या ही c हैं।

मान लीजिए हमें $+6-(-5)$ ज्ञात करना है। संख्या रेखा पर -5 से प्रारंभ कर 6 तक पगों की गिनती करते हैं। यह संख्या 11 है (देखिए आकृति 2.7)। इस प्रकार, $+6-(-5) = 11$ है।



आकृति 2.7

ध्यान दीजिए $6 + [-(-5)] = 6 + 5$
$= 11$

[अनुच्छेद 2.4 के अनुसार एक ऋणात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक संगत धनात्मक पूर्णांक होता है।

इस प्रकार 6 में से – 5 को घटाने का वही प्रभाव होता है जो 6 में –(–5) को जोड़ने का है।

इसी प्रकार, यदि हमें –8 में से 7 घटाना है, तो

$$(-8)-(7) = -8+(-7)$$
$$= -15$$

इस प्रकार घटाने के लिए, हम निम्नलिखित नियम का प्रयोग करते हैं:

यदि a व b दो पूर्णांक हैं, तो $a-b=a+(-b)$ है, अर्थात् b को a में से घटाने के लिए b का चिह्न बदल कर a में जोड़ देते हैं। इस प्रकार, घटाने के प्रत्येक प्रश्न को योग का प्रश्न माना जा सकता है।

इस नियम के कारण हम $a-b$ तथा $a+(-b)$ का प्रयोग आपस में बदल कर सकते हैं।

उदाहरण 5: 8 में से –10 घटाइए।

हल: $8-(-10) = 8+(10) = 18$

हम जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं पर व्यवकलन संक्रिया करने पर यह आवश्यक नहीं है कि पूर्ण संख्या ही प्राप्त हो। परन्तु पूर्णांक में से पूर्णांक को घटाने पर सदैव एक पूर्णांक ही प्राप्त होता है। अतः हमें प्राप्त होता है:

गुण I : *यदि a व b दो पूर्णांक हैं, तो $a-b$ भी एक पूर्णांक ही होगा।*

हम निम्न गुण भी सरलता से देख सकते हैं:

गुण II : *किसी भी पूर्णांक a के लिए $a-0=a$ होता है।*

गुण III : *यदि a, b व c पूर्णांक हैं और $a>b$, तो $a-c>b-c$ होता है।*

●●●

प्रश्नावली 2.3

1. निम्न में से प्रत्येक में दूसरे पूर्णांक में से पहले पूर्णांक को घटाइए:

   (i) 3, 8 (ii) 10, 4 (iii) –15, 10

   (iv) –200, –100 (v) 1001, 101 (vi) 2, –7

(vii) –812, 3126 (viii) 8650, – 6 (ix) –3987, – 4109

(x) –155, 0 (xi) 0, –1005 (xii) 83241, 40321

2. 7 में से –5 को घटाइए। –5 में से 7 को घटाइए। क्या दोनों परिणाम समान हैं?

3. –230 और 169 के योग को –25 में से घटाइए।

4. –290 व 732 के योग में से 998 व – 486 के योग को घटाइए।

5. निम्न में प्रत्येक * के स्थान पर '<' या '>' लिखिए ताकि कथन सत्य हो जाए:

(i) (– 6) + (–9) * (– 6) – (–9)

(ii) (–12) – (–12) * (–12) + (–12)

(iii) (–20) –(+ 20) * 20 –(+ 65)

6. रिक्त स्थान भरिए:

(i) – 6 + -------- = 0

(ii) 19 + ---------- = 0

(iii) 12 + (–12) = -----

(iv) – 4 + ------------ = –12

(v) – 256 + --------- = – 396

(vi) ---------- –215 = – 64

7. दो पूर्णांकों का योग 48 है। यदि एक पूर्णांक –24 है, तो दूसरा पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

8. दो पूर्णांकों का योग –396 है। यदि एक पूर्णांक 64 है, तो दूसरा पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

9. मान ज्ञात कीजिए:

(i) –17 – (–13) (ii) –7 –8 –(–25)

(iii) (2–3) + (2–3) (iv) –13 + 32 – 18 –1

(v) $50 - (-48) - (-2)$ (vi) $-7 + (-8) + (-90)$

(vii) $18 - [(-3) + 15]$ (viii) $-12 - [(-15) + (-2) -3]$

10. p और q दो पूर्णांक इस प्रकार हैं कि p, q का पूर्ववर्ती है। $p - q$ का मान ज्ञात कीजिए।

11. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $-13 > -8 - (-2)$

(ii) $-4 + (-2) < 2$

(iii) किसी ऋणात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

(iv) यदि a व b दो ऐसे पूर्णांक हैं कि $a > b$ है, तो $a - b$ सदैव एक धनात्मक पूर्णांक होगा।

12. निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 19 - 20$

(**संकेत:** संख्याओं के युग्म बनाइए।)

13. योग ज्ञात कीजिए

$2 + (-2) + 2 + (-2) + 2 + (-2) + \ldots$, यदि

(i) पदों की संख्या 319 हो।

(ii) पदों की संख्या 230 हो।

14. किसी एक विशेष दिन दिल्ली का तापमान प्रातः 10 बजे 13^0C था परन्तु मध्य रात्रि में यह गिर कर 6^0C तक पहुँच गया। उसी दिन चैन्नै में प्रातः 10 बजे तापमान 18^0C था परन्तु मध्य रात्रि में यह गिर कर 10^0C तक पहुँच गया। इनमें से कौन सी गिरावट अधिक है?

2.9 पूर्णांकों का गुणन

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं की गुणन संक्रिया बार-बार योग (repeated addition) की संक्रिया है। उदाहरणार्थ,

$$3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15 \text{ होता है।}$$

इसी प्रकार,

$$3 \times (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15 \quad (1)$$

हम यह भी जानते हैं कि

$$3 \times 5 = 5 \times 3 \text{ है तथा } 5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \text{ है।}$$

अत: $3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$

इसी प्रकार,

$$(-3) \times 5 = (-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3) = -15 \text{ होगा।} \quad (2)$$

इस प्रकार, (1) व (2) से

$$3 \times (-5) = (-3) \times 5 = -15 = -(3 \times 5)$$

इस उदाहरण को दृष्टिगत रख कर हम पूर्णांकों के गुणनफल के लिए निम्नलिखित नियम प्राप्त करते हैं :

नियम 1: ***विपरीत चिह्नों वाले दो पूर्णांकों का गुणनफल प्राप्त करने के लिए हम उन पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों का गुणनफल प्राप्त कर उसमें ऋण का चिह्न लगाते हैं।***

-3 व -5 का गुणनफल क्या होगा? अर्थात् दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल किस प्रकार का होगा? हम देख चुके हैं कि

$$3 \times (-5) = -(3 \times 5)$$

तथा $(-3) \times 5 = -(3 \times 5)$

यदि इन दोनों तथ्यों को हम क्रमशः प्रथम तथ्य तथा द्वितीय तथ्य कहें, तब

$$(-3) \times (-5) = -[(-3) \times 5], \text{ प्रथम तथ्य के अनुसार}$$

$$= -[-(3 \times 5)], \text{ द्वितीय तथ्य के अनुसार}$$

साथ ही, हम जानते हैं कि $-(-a) = a$ है।

अत: $(-3) \times (-5) = 3 \times 5 = 15$

इस उदाहरण से हम निम्नलिखित नियम प्राप्त करते हैं:

नियम 2: ***दो धनात्मक अथवा दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल प्राप्त करने के लिए हम उन दोनों पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों का गुणनफल ज्ञात करते हैं और उसमें धनात्मक चिह्न लगा देते हैं।***

उदाहरण 6: निम्न गुणनफलों को ज्ञात कीजिए:

(i) $(-16) \times (-20)$ (ii) $30 \times (-5)$ (iii) -169×0

हल: (i) $(-16) \times (-20) = 16 \times 20$ [चूँकि $|-16| = 16$, $|-20| = 20$]

$= 320$ **(नियम 2)**

(ii) $30 \times (-5) = -(30 \times 5)$, [चूँकि $|-30| = 30$, $|-5| = 5$]
$= -150$ (नियम 1)

(iii) $-169 \times 0 = 0$ (याद रहे कि किसी भी पूर्णांक का 0 से गुणनफल 0 होता है।)

अब हम गुणन संक्रिया के कुछ गुणों को सूचिबद्ध करेंगे। पूर्ण संख्याओं के समान ही पूर्णांकों में भी निम्नलिखित गुण होते हैं:

गुण I : *सभी पूर्णांकों a व b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।*

दृष्टांत:
(i) $2 \times 3 = 6$, एक पूर्णांक है,
(ii) $(-2) \times 5 = -10$, एक पूर्णांक है,
(iii) $4 \times (-7) = -28$, एक पूर्णांक है,
(iv) $(-6) \times (-9) = 54$ एक पूर्णांक है।

गुण II : *$a \times b = b \times a$ होता है।*

दृष्टांत:
(i) $(-3) \times 4 = 4 \times (-3) = -12$, तथा
(ii) $(-5) \times (-6) = (-6) \times (-5) = 30$

गुण III: *$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ होता है।*

दृष्टांत:
(i) $(-3) \times (8 \times 5) = (-3) \times (40) = -120$, तथा
$(-3 \times 8) \times 5 = -24 \times 5 = -120$
(ii) $5 \times [(-15) \times (-4)] = 5 \times 60 = 300$, तथा
$[5 \times (-15)] \times (-4) = (-75) \times (-4) = 300$

अतः पूर्ण संख्याओं के समान ही तीन या तीन से अधिक पूर्णांकों का गुणनफल भी पूर्णांकों के क्रम पर निर्भर नहीं करता। हमने यह भी देखा कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। इसलिए चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल भी धनात्मक पूर्णांक होगा। वस्तुत:

यदि किसी गुणनफल में ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम है, तो गुणनफल धनात्मक होगा। यदि ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम है, तो गुणनफल ऋणात्मक होगा।

उदाहरणार्थ, गुणनफल $(-4) \times (-2) \times (+8) \times (+6) \times (-10) \times (-5)$ धनात्मक होगा तथा गुणनफल $(-8) \times (-2) \times (+10) \times (+16) \times (-19)$ ऋणात्मक होगा।

पूर्णांकों के गुणनफल के निम्नलिखित नियमों पूर्ण संख्याओं के संगत नियमों के समान ही हैं:

गुण IV : *सभी पूर्णांकों* a *के लिए* $1 \times a = a \times 1 = a$ *होता है।*

गुण V : *सभी पूर्णांकों* a *के लिए* $0 \times a = a \times 0 = 0$ *होता है।*

गुण VI : *सभी पूर्णांकों* a, b *और* c *के लिए,*

(i) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ *तथा*

(ii) $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$ *होता है।*

उदाहरण के लिए,

(i) $3 \times [(-10) + 4] = 3 \times (-10) + 3 \times 4$

$= -30 + 12 = -18$

साथ ही, $3 \times [(-10) + 4)] = 3 \times (-6) = -18$

(ii) $(-5) \times (18 - 3) = (-5) \times 18 - [(-5) \times 3]$

$= -90 - (-15)$

$= -90 + 15 = -75$

साथ ही, $(-5)\times(18-3) = (-5) \times 15$

$= -75$

पूर्णांकों के गुणनफल के लिए हमारे पास निम्न गुण भी उपलब्ध है:

गुण VII : *पूर्णांकों* a, b *और* c *के लिए, यदि* $a > b$, *तो*

(i) $a \times c > b \times c$ *होता है, यदि* c *धनात्मक है,*

(ii) $a \times c < b \times c$ *होता है, यदि* c *ऋणात्मक है।*

दृष्टांत: (i) $8 > 5$ है।

साथ ही, $8 \times 3 = 24$, $5 \times 3 = 15$ तथा $24 > 15$ है।

इस प्रकार, $8 \times 3 > 5 \times 3$ है।

(ii) $7 > (-3)$ है।

साथ ही, $7 \times (-5) = -35$, $(-3) \times (-5) = 15$,

तथा $-35 < 15$ है।

इस प्रकार, $7 \times (-5) < (-3) \times (-5)$ है।

प्रश्नावली 2.4

1. निम्न में से प्रत्येक गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $2 \times (-15)$

(ii) $(-225) \times 8$

(iii) $(-17) \times (-20)$

(iv) $3 \times (-8) \times 5$

(v) $9 \times (-3) \times (-6)$

(vi) $(-12) \times (-12) \times (-12)$

(vii) $(-2) \times 36 \times (-5)$

(viii) $(-8) \times (-43) \times 0$

(ix) $18 \times (-185) \times (-4)$

(x) $(-45) \times 55 \times (-10)$

(xi) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)$

(xii) $(-3) \times (-6) \times (-9) \times (-12)$

2. निम्न गुणन सारणी को पूरा कीजिए:

द्वितीय संख्या

प्रथम संख्या

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	16								
-3									
-2									
-1									
0									
1									
2									
3									
4									

क्या गुणन सारणी की प्रथम (क्षैतिज) पंक्ति प्रथम (ऊर्ध्वाधर) स्तंभ के समान है? क्या दूसरी पंक्ति दूसरे स्तभ के समान है? गुणन के किस गुण के कारण ये पंक्तियाँ व स्तंभ समान हैं ?

3. निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(-8) \times 0 \times 37 \times (-37)$

(ii) $(1569 \times 887) - (569 \times 887)$

(iii) $(-183) \times (-44) + (-183) \times (-56)$

(iv) $18946 \times 99 - (-18946)$

(v) $15625 \times (-2) + (-15625) \times 98$

(vi) $(-80) \times (10 - 5 - 43 + 98)$

4. यदि हम निम्न को गुणा करें, तो गुणनफल का चिह्न क्या होगा?

(i) 8 ऋणात्मक पूर्णांक तथा 1 धनात्मक पूर्णांक,

(ii) 6 ऋणात्मक पूर्णांक तथा 16 धनात्मक पूर्णांक,

(iii) 21 ऋणात्मक पूर्णांक तथा 3 धनात्मक पूर्णांक,

(iv) 199 ऋणात्मक पूर्णांक तथा 10 धनात्मक पूर्णांक।

5. यदि $a \times (-1) = -30$ है, तो पूर्णांक a धनात्मक है या ऋणात्मक?

6. यदि $a \times (-1) = 30$ है, तो पूर्णांक a धनात्मक है या ऋणात्मक?

7. वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिसका '–1' से गुणनफल है:

(i) -40 (ii) 46 (iii) 0

8. तुलना कीजिए अर्थात् बताइए कि निम्न में से कौन सा पूर्णांक बड़ा है:

(i) $(8 + 9) \times 10$ और $8 + 9 \times 10$

(ii) $(8 - 9) \times 10$ और $8 - 9 \times 10$

(iii) $[(-2) - 5] \times (-6)$ और $(-2) - 5 \times (-6)$

9. निम्न की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i) $19 \times [7 + (-3)] = 19 \times 7 + 19 \times (-3)$

(ii) $(-23) \times [(-5) + (+19)] = (-23) \times (-5) + (-23) \times (+19)$

10. निम्न में से प्रत्येक कथन के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होगा।

(ii) दो पूर्णांकों में यदि एक ऋणात्मक हो, तो उनका गुणनफल अवश्य ही ऋणात्मक होगा।

(iii) एक ऋणात्मक पूर्णांक और एक धनात्मक पूर्णांक का गुणनफल शून्य हो सकता है।

(iv) यदि $a > 1$ है, तो ऐसा कोई पूर्णांक b नहीं होता जिसके लिए $a \times b = b \times a = b$ हो।

(v) सभी शून्येतर पूर्णांकों a तथा b के लिए $a \times b$ सदैव a या b से बड़ा होगा।

2.10 पूर्णांकों में विभाजन

हम जानते हो कि एक पूर्ण संख्या को दूसरी पूर्ण संख्या से किस प्रकार विभाजित किया जाता है। हमें यह भी ज्ञात है कि विभाजन संक्रिया गुणन की विपरीत संक्रिया है। यदि हम एक गुणन तथ्य तथा उससे संबंधित दो विभाजन तथ्यों को ध्यान में रखें, तो पूर्णांकों के विभाजन के नियम पूर्णांकों के गुणन के नियमों से प्राप्त किए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ,

गुणन तथ्य	**विभाजन के संगत तथ्य**	
$2 \times 4 = 8$	$8 \div 2 = 4$,	$8 \div 4 = 2$
$(-2) \times (-4) = 8$	$8 \div (-2) = -4$,	$8 \div (-4) = -2$
$2 \times (-4) = -8$	$-8 \div 2 = -4$,	$-8 \div (-4) = 2$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम पूर्णांकों के विभाजन के लिए निम्नलिखित नियम प्राप्त करते हैं:

(i) *यदि भाजक और भाज्य का चिह्न समान है, अर्थात् दोनों ही धनात्मक हैं अथवा दोनों ही ऋणात्मक हैं, तो भागफल सदैव धनात्मक होता है।*

(ii) *यदि भाजक और भाज्य विपरीत चिह्न वाले हैं, तो भागफल सदैव ऋणात्मक होता है।*

अब हम विभाजन संक्रिया के गुणों को सूचिबद्ध करेंगे।

गुण I : *यदि a तथा b दो पूर्णांक हैं, तो $a \div b$ का पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है। उदाहरण के लिए $14 \div 3$, $-15 \div 7$ पूर्णांक नहीं हैं।*

गुण II : *यदि a एक पूर्णांक है तथा a 0 है तो $a \div a = 1$ होता है।*

गुण III : *किसी भी पूर्णांक a के लिए, $a \div 1 = a$ होता है।*

गुण IV : *यदि a एक शून्येतर पूर्णांक है, तो $0 \div a = 2$ है, परन्तु $a \div 0$ का*

कोई अर्थ नहीं है।

गुण V : *यदि* $c \neq 1$ *तथा* $a \neq 0$ *है तो* $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ *होगा।*

गुण VI : *यदि* $a > b$ *है, तो*

(i) $a \div c > b \div c$ *है, यदि* c *धनात्मक है;*

(ii) $a \div c < b \div c$ *है, यदि* c *ऋणात्मक है।*

उदाहरण के लिए,

(i) $24 > 16$ है तथा 8 धनात्मक है।

साथ ही, $24 \div 8 = 3$, $16 \div 8 = 2$ और $3 > 2$ है।

इस प्रकार, $24 \div 8 > 16 \div 8$ है।

(ii) $24 > 16$ है तथा -8 ऋणात्मक है।

साथ ही, $24 \div (-8) = -3$, $16 \div (-8) = -2$ और $-3 < -2$ है ।

इस प्रकार, $24 \div (-8) < 16 \div (-8)$ है।

टिप्पणी : यहाँ ध्यान देने की बात है कि गुण I, II, IV तथा V संगत गुणन के गुणों से भिन्न हैं।

●●●

प्रश्नावली 2.5

1. निम्न में से प्रत्येक में भागफल ज्ञात कीजिए:

(i) $18 \div (-3)$ (ii) $(-18) \div 3$

(iii) $(-18) \div (-3)$ (iv) $36 \div (-9)$

(v) $(-48) \div (-16)$ (vi) $0 \div (-12)$

(vii) $(-1728) \div 12$ (viii) $(-15625) \div (-125)$

(ix) $(-729) \div (-81)$ (x) $10569 \div (-1)$

(xi) $200000 \div (-100)$ (xii) $17699 \div (-17699)$

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) $296 \div$ ——— $= 296$, (ii) $-3785 \div$ ——— $= 1$

(iii) ——— $\div 578 = 0$ (iv) ——— $\div 1 = -3065$

(v) ——— $\div 156 = -2$ (vi) ——— $\div 567 = -1$

3. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $0 \div (-9) = 0$

(ii) $(-7) \div 0 = 0$

(iii) $(-18) \div (-6) = -3$

(iv) $13 \div (-1) = -13$

(v) $(-19) \div (-1) = -19$

(vi) $(+20) \div (-5) = 4$

2.11 पूर्णांकों की घात

यदि हम दो समान संख्याओं का गुणा करें, अर्थात् किसी पूर्णांक a के लिए हमारे पास गुणनफल $a \times a$ है, तो हम इसे a^2 लिखते हैं तथा 'a का वर्ग', 'a की घात दो' या 'a की दूसरी घात' पढ़ते हैं। इसी प्रकार, $a \times a \times a$ को संक्षेप में हम a^3 लिखते हैं और 'a का घन,' 'a की घात 3' अथवा 'a की तीसरी घात' पढ़ते हैं। इसी प्रकार, a^4, a^5 क्रमशः $a \times a \times a \times a$ तथा $a \times a \times a \times a \times a$ के संक्षिप्त रूप हैं। a^4 को 'a की घात 4' तथा a^5 को 'a की घात 5' पढ़ा जाता है।

उदाहरण के लिए, $2^2 = 2 \times 2 = 4$, $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$,

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$, $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$ आदि हैं।

व्यंजक a^3 में संख्या a को *आधार (base)* तथा 3 को ***घातांक** (exponent)* कहते हैं।

यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह हैं कि यदि आधार ऋणात्मक पूर्णांक है और घातांक सम धनात्मक पूर्णांक है, तो मान धनात्मक पूर्णांक है और यदि ऋणात्मक आधार का घातांक विषम धनात्मक पूर्णांक है, तो मान ऋणात्मक है।

साथ ही,

$$(-1)^{\text{विषम धनात्मक पूर्णांक}} = -1$$

$$(-1)^{\text{सम धनात्मक पूर्णांक}} = 1$$

●●●

प्रश्नावली 2.6

1. निम्न में से प्रत्येक के लिए आधार और घातांक लिखिए:

(i) 5^4 (ii) $(-2)^3$ (iii) 1^1

(iv) $(-6)^1$ (v) $(-27)^2$ (vi) 10^5

2. निम्न को घात संकेतन का प्रयोग करके लिखिए:

(i) $10 \times 10 \times 10 \times 10$

(ii) $(13) \times (-13) \times (-13) \times (-13) \times (-13) \times (-13)$

3. निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

(i) 50^2 (ii) $(-1)^{51}$ (iii) 1^{100} (iv) $(-1)^{20}$ (v) $(-2)^8$

(vi) $2^3 \times 3^2$ (vii) $2^3 \times 2^5$ (viii) $(-2)^6 \div (-2)^2$

(ix) $(-4)^5 \div (-4)^2$ (x) $(-2)^4 \times (-3)^3 \times (-1)$

(xi) $(-1)^3 \times (-10)^2$ (xii) $2^3 \times (-3)^2 \times 8$

4. प्रथम दस प्राकृत संख्याओं के वर्ग लिखिए। उनके इकाई के अंकों पर ध्यान दीजिए। आप क्या देखते हैं?

5. प्रथम दस प्राकृत संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए।

6. ज्ञात कीजिए:

(i) 20^2 (ii) $(-100)^2$ (iii) 200^2

(iv) 70^2 (v) $(-150)^2$ (vi) 1000^2

7. निम्न में से प्रत्येक का घन ज्ञात कीजिए:

(i) -12 (ii) -13 (iii) -15

(iv) 11 (v) 100 (vi) 1000

8. निम्न में से प्रत्येक की घात 4 ज्ञात कीजिए:

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3

(iv) -1 (v) -2 (vi) -3

9. निम्न में से प्रत्येक की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i) $(-2)^4 \times (-2)^3 = (-2)^7$ (ii) $10^2 \times 10^3 = 10^5$

(iii) $(-4)^5 \div (-4)^2 = (-4)^3$ (iv) $3^7 \div 3^2 = 3^5$

10. निम्न की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i) $3^2 + 4^2 = 5^2$ (ii) $12^2 + 5^2 = 13^2$

11. सत्यता की जाँच कीजिए:

(i) $10^2 - 8^2 = 6^2$ (ii) $15^2 - 9^2 = 12^2$

12. निम्न में से प्रत्येक कथन के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) 6^5 और 5^6 का अन्तर शून्य है।

(ii) किसी भी पूर्णांक का वर्ग धनात्मक होता है।

(iii) एक ऋणात्मक पूर्णांक का घन ऋणात्मक होता है।

(iv) $3^6 \div 3^5 = 3^{6-5}$

(v) $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4}$

(vi) $2^3 + 2^2 = 2^5$

(vii) $3^3 - 3^2 = 3$

(viii) $(-1)^{11} = 1$

2.12 कोष्ठकों का प्रयोग एवं सरलीकरण

जब किसी व्यंजक में दो या दो से अधिक आधारभूत संक्रियाएँ संबद्ध होती हैं, तो व्यंजक को सरल करने के लिए हम निम्न परिपाटी का पालन करते हैं:

(क) हम क्रमानुसार भाग, गुणन, योग और घटाने (भागुयोघ) (DMAS) की संक्रियाएँ बाईं से दाईं ओर की दिशा में करते हैं।

उदाहरण 7: निम्न व्यंजकों को सरल कीजिए :

(i) $60 \div 6 + 2$

(ii) $12 + 8 \div 2$

(iii) $10 - 6 \div 3$

(iv) $68 - 7 \times 3 + 10 - 9$

हल: (i) सबसे पहले हम संक्रिया $\div$ की जाँच कर इसे संपन्न करते हैं। इस प्रकार

$$60 \div 6 + 2 = (60 \div 6) + 2 = 10 + 2 = 12$$

(ii) जैसा हमने (i) में किया है, पहले हम भाग की संक्रिया करते हैं। अतः

$$12 + 8 \div 2 = 12 + (8 \div 2) = 12 + 4 = 16$$

(iii) $10 - 6 \div 3 = 10 - (6 \div 3) = 10 - 2 = 8$

(iv) यहाँ कोई भाग संक्रिया नहीं है। अतः हम पहले गुणन की जाँच कर इसे संपन्न करेंगे। इस प्रकार,

$68 - 7 \times 3 + 10 - 9 = 68 - (7 \times 3) + 10 - 9$

$= 68 - 21 + 10 - 9$

$= 68 + 10 + (-21 - 9)$ (समान चिह्न वाली संख्याओं को साथ-साथ रखने पर)

$= 78 - 30$

$= 48$

(ख) भागुयोघ (DMAS) नियम के अनुसार व्यंजक $42 \div 7 \times 3$ को सरल करने के लिए पहले 42 को 7 से विभाजित कर उसे गुणा करेंगे। अर्थात्

$$42 \div 7 \times 3 = (42 \div 7) \times 3 = 6 \times 3 = 18$$

परन्तु यदि हम पहले 7 को 3 से गुणा कर उससे 42 को भाग देना चाहते हैं, तो हम व्यंजक को $42 \div (7 \times 3)$ लिखेंगे। इस प्रकार $42 \div (7 \times 3)$ का सरलीकरण निम्न होगा:

$42 \div (7 \times 3) = 42 \div 21 = 2$

अत, यदि व्यंजक $a \div (b \times c)$ के रूप में लिखा है, तो इसे सरल करने के लिए कोष्ठकों (brackets) में दी गयी संक्रिया को पहले संपन्न करेंगे।

(ग) व्यंजक $36 \div 6 + 3$ का अर्थ है पहले 36 में 6 का भाग और फिर भागफल में 3 का योग। परन्तु यदि हम पहले 6 और 3 का योग कर इस योग से 36 में भाग देना चाहते हैं, तो व्यंजक को लिखेंगे $36 \div (6 + 3)$। इसका अर्थ हुआ कि यदि व्यंजक $a \div (b + c)$ के रूप में लिखा है, तो पहले कोष्ठकों के अन्दर वाली संक्रिया संपन्न की जाएगी। इसी प्रकार, व्यंजक $a \times (b + c)$ को सरल करने के लिए, पहले कोष्ठकों के अन्दर वाली संक्रिया संपन्न करेंगे।

उदाहरण 8: निम्न व्यंजकों को सरल कीजिए:

(i) $48 \div (2 \times 3)$

(ii) $(48 \div 2) \times 3$

(iii) $63 \div (7 + 2)$

(iv) $8 \times (7 - 2)$

हल: (i) $48 \div (2 \times 3) = 48 \div 6 = 8$ [पहले कोष्ठकों के अंदर वाले व्यंजक का मान ज्ञात करने पर]

(ii) $(48 \div 2) \times 3 = 24 \times 3 = 72$

(iii) $63 \div (7 + 2) = 63 \div 9 = 7$

(iv) $8 \times (7 - 2) = 8 \times 5 = 40$

(घ) हमने कोष्ठक ( ) का प्रयोग समूहन संकेत (grouping symbols) के लिए किया है जिससे यह स्पष्ट हो सके कि कौन सी संक्रिया पहले करनी है। बड़े व्यंजकों में एक से अधिक कोष्ठकों का प्रयोग कर सकते हैं। व्यंजक $228 \div \{(3 \times 7) - 2\}$ में दो समूहन संकेत ( ) तथा { } प्रयोग किए गए हैं। इसी प्रकार, व्यंजक $25 + [228 \div \{(3 + 7) \times 2\}]$ में तीन कोष्ठकों ( ), { } व [ ] का प्रयोग किया गया है।

(ङ) सामान्यतया प्रयोग में आने वाले समूहन संकेत हैं:

संकेत	**नाम**
( )	छोटा कोष्ठक या साधारण कोष्ठक
{ }	मंझला कोष्ठक या धनु (कोष्ठक)
[ ]	बड़ा कोष्ठक या वर्ग कोष्ठक

समूह बनाते समय हम सामान्यतया कोष्ठक से पहले गुणा का चिह्न नहीं लगाते हैं। जैसे $2 \times (3 + 5)$ को हम $2\,(3 + 5)$ लिखते हैं। इस प्रकार किसी संख्या के तथा कोष्ठक के बीच कोई चिह्न न होने का अर्थ है कि कोष्ठक के अन्दर वाली संख्या का कोष्ठक से बाहर वाली संख्या से गुणा कीजिए। परन्तु यदि कोष्ठक से पहले ÷ का चिह्न है, तो इसे नहीं हटाते। इस प्रकार व्यंजक $20 \div (2 + 3)$ को बिना ÷ का चिह्न हटाए इसी प्रकार लिखते हैं।

यदि किसी व्यंजक में एक से अधिक कोष्ठक हैं, तो सबसे पहले हम छोटे कोष्ठक के अन्दर के व्यंजक को वाँछित संक्रियाओं द्वारा सरल कर एक पूर्णांक प्राप्त करते हैं। फिर हम इस पूर्णांक से ( ) में लिखे व्यंजक को प्रतिस्थापित कर के छोटे कोष्ठक को हटा देते हैं। इसके बाद हम मंझले कोष्ठक को लेते हैं और उस

पर ( ) जैसी ही प्रक्रिया अपनाते हैं। अंत में, वर्ग कोष्ठक को हटाया जाता है। कोष्ठकों को हटाते समय हम निम्नलिखित बातें भी करते हैं:

(i) यदि कोष्ठक से पहले कोई संख्या है, तो उससे कोष्ठक के अन्दर वाली संख्या को गुणा करते हैं और कोष्ठक हटा देते हैं।

(ii) यदि कोष्ठक से पहले ऋण चिह्न लगा है, तो कोष्ठक के अन्दर वाली संख्या का चिह्न बदल देते हैं (अर्थात् धनात्मक संख्या को ऋणात्मक तथा ऋणात्मक संख्या को धनात्मक बना देते हैं) और कोष्ठक हटा देते हैं।

(iii) यदि कोष्ठक से पहले धनात्मक चिह्न लगा हो, तो कोष्ठक के अन्दर वाली संख्या बिना चिह्न बदले लिख देते हैं और कोष्ठक हटा देते हैं।

(iv) बिना चिह्न वाली संख्या धनात्मक संख्या मानी जाती है।

उदाहरण 9: निम्नलिखित व्यंजक को सरल कीजिए:

$$30 - [15 - \{6 + (18 - 14)\}]$$

हल: $30 - [15 - \{6 + (18 - 14)\}]$

$= 30 - [15 - \{6 + 4\}]$ (छोटे कोष्ठक को हटाना)

$= 30 - [15 - 10]$ (मंझले कोष्ठक को हटाना)

$= 30 - 5$ (बड़े कोष्ठक को हटाना)

$= 25$

उदाहरण 10: निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

$$(-13) + (-4) \div 2 - 3\,[-\{(-3) \times (-7) - (3 + 5)\}]$$

हल: $(-13) + (-4) \div 2 - 3\,[-\{(-3) \times (-7) - (3 + 5)\}]$

$= (-13) + (-4) \div 2 - 3\,[-\{(-3) \times (-7) - 8\}]$

$= (-13) + (-4) \div 2 - 3\,[-\{21 - 8\}]$

$= (-13) + (-4) \div 2 - 3\,[\{-13\}]$

$= (-13) + (-4) \div 2 - 3\,[-13]$

$= (-13) + (-4) \div 2 + 39$

$= (-13) - 2 + 39$

$= -15 + 39$

$= 24$

2.13 संक्रिया 'का'

कभी-कभी हम '...का तिगुना', '...का एक चौथाई', '...का 5 प्रतिशत' जैसे वाक्यांशों का प्रयोग करते हैं। इन वाक्यांशों में 'का' का अर्थ होता है 'गुणा'। उदाहरणार्थ '10 का तिगुना' का अर्थ है '10×3'। इसी प्रकार, '16 का एक चौथाई' का अर्थ है '$16 \times \frac{1}{4}$', '20 का 5 प्रतिशत' का अर्थ है '$20 \times \frac{5}{100}$' आदि। यह संक्रिया 'का', विभाजन तथा गुणन की संक्रियाओं से पहले की जाती है।

उदाहरण 11: मान ज्ञात कीजिए:

(i) (6 + 9) का 3

(ii) (3 का 4) का 5

(iii) $72 \div 6$ का 4

हल: (i) (6 + 9) का 3 = 15 का 3 (पहले कोष्ठक खोलने पर)
$= 15 \times 3$
$= 45$

(ii) (3 का 4) का 5 $= (3 \times 4) \times 5$
$= 12 \times 5 = 60$

(iii) $72 \div 6$ का 4 $= 72 \div (6 \times 4)$ ('का' का पहले प्रयोग करने पर)
$= 72 \div 24$
$= 3$

2.14 कोकाभागुयोघ (BODMAS) नियम

अक्षर श्रृंखला 'कोकाभागुयोघ' में को **कोष्ठक** के लिए, **का** संक्रिया **'का'** के लिए, भा संक्रिया **भाग** के लिए, **गु गुणन** के लिए, **यो योग** के लिए तथा **घ घटाने** (व्यवकलन) की संक्रिया के लिए प्रयुक्त किया गया है। ये अक्षर जिस क्रम में लिखे गए हैं उसी क्रम में संगत संक्रियाएँ व्यंजक को सरल करने में संपन्न की जाती हैं। अर्थात् किसी व्यंजक में सबसे पहले कोष्ठक (यदि कोई है तो) हटाए जाते हैं। कोष्ठक हटाने के नियम हम पहले पढ़ चुके हैं। इसके बाद संक्रिया 'का' संपन्न की जाती है। उसके पश्चात भाग और फिर गुणन किया जाता है। तत्पश्चात हम योग तथा घटाने की संक्रियाएँ इसी क्रम में संपन्न करते हैं।

विभिन्न संक्रियाओं के नियम संक्षेप मे इस प्रकार हैं:

कोष्ठक नियम:

(i) कोष्ठक क्रम ( ), { }, [ ] में हटाए जाते हैं। कोष्ठक हटाने का अर्थ है 'कोष्ठक के अन्दर के व्यंजक को सरल कर एक पूर्णांक बनाना तथा उपयुक्त चिह्न लगाना'।

(ii) यदि कोष्ठकों से पहले + चिह्न है, तो कोष्ठकों के अन्दर प्राप्त अन्तिम पूर्णांक का चिह्न बदले बिना कोष्ठकों को हटा दिया जाता है।

(iii) यदि कोष्ठकों से पहले – चिह्न है, तो कोष्ठकों को हटा कर उनके अन्दर प्राप्त अन्तिम पूर्णांक का चिह्न बदल दिया जाता है।

(iv) यदि कोष्ठकों से पहले कोई संख्या है, तो कोष्ठकों के अन्दर प्राप्त अन्तिम पूर्णांक का उस संख्या से गुणा करके कोष्ठकों को हटा दिया जाता है।

'का' के नियम:

'का' का अर्थ है गुणा और उसके नियम गुणा जैसे ही हैं। यह संक्रिया अन्य सभी अंकगणितीय संक्रियाओं से पहले की जाती है।

भाग, गुणा, योग व घटाना ये सभी संक्रियाएँ इसी क्रम में की जाती हैं। इन संक्रियाओं को संपन्न करने के नियम आप पहले ही पढ़ चुके हैं।

इन नियमों का प्रयोग कर हम किसी भी व्यंजक को सरल कर सकते हैं, और उसका मान ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 13: मान ज्ञात कीजिए:

$30 - 5 \times 2$ का $3 + (19 - 3) \div 8$

हल: $30 - 5 \times 2$ का $3 + (19 - 3) \div 8$

$= 30 - 5 \times 2$ का $3 + 16 \div 8$ (संक्रिया को अर्थात् कोष्ठक ( ) हटाना)

$= 30 - 5 \times 6 + 16 \div 8$ (संक्रिया 'का' अर्थात् 2 का 3 = 2×3)

$= 30 - 5 \times 6 + 2$ (संक्रिया भा, अर्थात् $16 \div 8$)

$= 30 - 30 + 2$ (संक्रिया गु, अर्थात् 5×6)

$= 30 - 28$ (संक्रिया यो, अर्थात् $-30 + 2$)

$= 2$ (संक्रिया घ, अर्थात् घटाना)

प्रश्नावली 2.7

1. मान ज्ञात कीजिए:

(i) $120 - 20 \div 2$

(ii) $28 - 5 \times 6 + 2$

(iii) $27 + 20 \div 5$

(iv) $(-29)\,(-1) + (-34) + 2$

(v) $17 + (-3) \times (-5) - 6$

(vi) $(-5) - (-48) \div (-16) + (-2) \times 6$

(vii) $(-15) + 4 \div (5 - 3)$

(viii) $5 + (10 - 5)$

(ix) $36 \div (5 + 7)$

(x) $3 - (5 - 6 \div 3)$

2. सरल कीजिए:

(i) $28 - 5$ का $2 + 2$

(ii) (-40) का $(-1) + 28 \div 7$

(iii) $7 \;\; \{13 - 2 \; (-4$ का $4)\}$

(iv) $[59 - \{7 \times 8 + (13 - 2$ का $5)\}]$ का 81

3. सरल कीजिए:

(i) $20 + \{10 - 5 + (7 - 3)\}$

(ii) $7 - \{13 - 2\,(4 \times -4)\} - 15 \div 3$

(iii) $(-1)\,\{(-5) + (-25)\} -$ का $\times (-7) - (8 - 10)\,(-4)$

(iv) $3\,[18 + \{3 + 4\,(4 - 2)\}]$

(v) $(14 \quad 7) \times \{8 + (3 + 7 - 1)\}$

(vi) $2 - [2 - \{2 - (2 - 2 - 2)\}]$

(vii) $18 + \{1 + (15 - 2) \times 4\}]$

(viii) $118 - \{121 \div (11 \times 11) - (-4) - (+3 - 7)\}$

(ix) $121 \div [17 - \{15 - 3\,(7 - 4)\}]$

(x) $15 - (-3)\,(4 - 4) \div 3\,\{5 + (-3) \times (-6)\}$

याद रखने योग्य बातें

1. प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।
2. शून्य प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा परन्तु प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।
3. कोई संख्या जितनी बड़ी होगी उसका विपरीत (ऋणात्मक) उतना ही छोटा होगा। (अर्थात्, यदि $a > b$ है, तो $-a < -b$ है।)
4. किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान उस संख्या के चिह्न पर बिना कोई ध्यान दिए उसका संख्यात्मक मान होता है।
5. दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है जिसका निरपेक्ष मान उन पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों के योग के बराबर होता है।
6. एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का योग ज्ञात करने के लिए, हम उनके निरपेक्ष मानों का अन्तर लेकर बड़े निरपेक्ष मान वाले पूर्णांक का चिह्न लगा देते हैं।
7. पूर्ण संख्याओं की संक्रियाओं के समस्त गुण, पूर्णांकों में भी सत्य होते हैं। उनके अतिरिक्त कुछ गुण निम्न हैं:
   (i) यदि a और b पूर्णांक हों, तो $a - b$ सदैव एक पूर्णांक होगा।
   (ii) प्रत्येक पूर्णांक a के लिए $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$
   (iii) पूर्णांकों में कोई सबसे छोटा पूर्णांक नहीं होता।
8. किसी पूर्णांक b को पूर्णांक a में से घटाने के लिए, हम b का चिह्न परिवर्तित करके उसे a में जोड़ देते हैं $[a - b = a + (-b)]$।
9. एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल प्राप्त करने के लिए, हम उनके निरपेक्ष मानों का गुणनफल प्राप्त करके परिणाम में ऋण चिह्न लगा देते हैं।
10. दो धनात्मक या दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल उनके निरपेक्ष मानों के गुणनफल के बराबर होता है।
11. एक धनात्मक व एक ऋणात्मक पूर्णांक का भागफल प्राप्त करने के लिए, हम उनके निरपेक्ष मानों का भागफल प्राप्त कर उसमें ऋण चिह्न लगा देते हैं।

12. दो धनात्मक अथवा दो ऋणात्मक पूर्णांकों का भागफल प्राप्त करने के लिए, हम उनके निरपेक्ष मानों का भागफल प्राप्त करते हैं। यह एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

13. किसी व्यंजक में से समूहन संकेत हटाने के लिए हम पहले सबसे भीतर का संकेत हटाते हैं। फिर शेष बचे संकेतों में से सबसे भीतर का दूसरा संके त हटाते हैं और इस प्रकार आगे भी करते जाते हैं।

14. $(-1)^{\text{विषम धनात्मक पूर्णांक}} = -1$, $(-1)^{\text{सम धनात्मक पूर्णांक}} = 1$

15. व्यंजक a^n में a आधार तथा n घातांक है। साथ ही,

$a^n = a \times a \times a \times \ldots\ n$ बार ।

16. जिन व्यंजकों में कोष्ठक एवं अंकगणितीय संक्रियाएँ साथ-साथ होती हैं, उनके सरलीकरण के लिए कोकाभागुयोघ (BODMAS) नियम का प्रयोग किया जाता है।

17. कोष्ठकों का सरलीकरण ( ), { }, [ ] के क्रम में किया जाता हैं।

18. यदि किसी कोष्ठक से पहले ऋण का चिह्न होता है, तो अन्दर वाले पूर्णांक का चिह्न बदल कर कोष्ठक हटा दिया जाता है।

19. यदि किसी कोष्ठक से पूर्व धन का चिह्न होता है, तो अन्दर वाले पूर्णांक का चिह्न बदले बिना ही कोष्ठक हटा दिया जाता है।

20. संक्रिया 'का' का अर्थ 'गुणा' होता है। इसे किसी भी अंकगणितीय संक्रिया से पहले किया जाता है।

गुणनखंड और गुणज

अध्याय 3

3.1 भूमिका

इस अध्याय में, हम गुणनखंड एवं गुणज की संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे। हम अभाज्य एवं भाज्य संख्याओं से संबंधित मूल विचारों का पुनरावलोकन करेंगे और महत्तम समापवर्तक तथा लघुतम समापवर्त्य की संकल्पनाओं का विस्तार से अध्ययन करेंगे। इस अध्याय में, हम प्राकृत संख्याओं की ही बात करेंगे। इसलिए सामान्यतया यहाँ हम 'प्राकृत' को छोड़ते हुए प्राकृत संख्या के लिए संख्या शब्द का ही प्रयोग करेंगे।

3.2 गुणनखंड और गुणज

संख्याएँ 1, 2, 5 और 10 संख्या 10 के यथार्थ (exact) भाजक हैं। इसी प्रकार, 1 और 17 संख्या 17 के यथार्थ भाजक हैं। किसी संख्या का यथार्थ भाजक उस संख्या का ***गुणनखंड** (factor)* कहलाता है। इस प्रकार 1, 2, 5 व 10 सभी संख्या 10 के गुणनखंड हैं। 1 व 17 दोनों ही संख्या 17 के गुणनखंड हैं। संख्या 3 संख्या 10 का गुणनखंड नहीं है। इसी प्रकार, 10 संख्या 15 का गुणनखंड नहीं है। ध्यान दीजिए कि किसी संख्या का गुणनखंड उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है। संख्या 10 संख्याओं 2 व 5 का गुणनफल है। एक संख्या को उसके किसी भी गुणनखंड का एक ***गुणज** (multiple)* कहते हैं। इस प्रकार संख्या 10, संख्याओं 1, 2, 5 और 10 में से प्रत्येक का एक गुणज है। 17 संख्याओं 1 व 17 का एक गुणज है। 10 संख्या 3 का गुणज नहीं है। इसी प्रकार, 15 भी 10 का एक गुणज नहीं है।

आइए, संख्या 3 पर विचार करें। 3 को प्राकृत संख्याओं 1, 2, 3, ... आदि

से गुणा करने पर, हमें प्राकृत संख्याएँ 3, 6, 9, ... आदि प्राप्त होती हैं। ये सभी संख्याएँ 3 के गुणज हैं। इसी प्रकार, संख्याएँ 2, 4, 6, 8, ... आदि सभी संख्या 2 के गुणज हैं। इससे स्पष्ट है कि *किसी दी हुई संख्या के असंख्य या अपरिमित गुणज होते हैं।*

उदाहरण 1: (i) संख्या 18 के 100 से छोटे सभी गुणज ज्ञात कीजिए।
(ii) संख्या 36 के सभी गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल: (i) 18 के अभीष्ट गुणज हैं:

$18 \times 1 = 18$
$18 \times 2 = 36$
$18 \times 3 = 54$
$18 \times 4 = 72$
$18 \times 5 = 90$

(ii) $36 = 1 \times 36$
$= 2 \times 18$
$= 3 \times 12$
$= 4 \times 9$
$= 6 \times 6$

इस प्रकार 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 व 36 सभी संख्या 36 के गुणनखंड हैं। गुणनखंड संख्या से छोटे अथवा संख्या के बराबर होते हैं। अतः केवल यही सब 36 के गुणनखंड हैं। इनके अतिरिक्त 36 का कोई और गुणनखंड नहीं है। चूँकि गुणनखंड संख्या से बड़े नहीं हो सकते, इसलिए किसी भी संख्या के गुणनखंडों की संख्या ***परिमित (सीमित)*** होती है।

3.3 अभाज्य एवं भाज्य संख्याएँ

प्राकृत संख्या 1 का केवल एक ही गुणनखंड है। 1 के अतिरिक्त सभी संख्याओं के दो या दो से अधिक गुणनखंड होते हैं। उदाहरण के लिए, संख्या 2 के दो गुणनखंड होते हैं जो 1 व 2 हैं। संख्या 3 के भी दो ही गुणनखंड होते हैं जो 1 व 3 हैं। संख्या 4 के तीन गुणनखंड हैं और वे 1, 2 व 4 हैं। इसी प्रकार, संख्या 12 के छः गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6 व 12 हैं। हम जानते हैं कि वे संख्याएँ जिनके दो और केवल दो ही गुणनखंड होते हैं *अभाज्य संख्याएँ (prime numbers*

or primes) कहलाती हैं तथा दो से अधिक गुणनखंडों वाली संख्या को ***भाज्य संख्या*** (*composite number*) कहते हैं। इस प्रकार 2, 3, 5, 7, 11, 13, सभी अभाज्य संख्याएँ हैं, जबकि संख्याएँ 4, 6, 8, 9, 10, 12 भाज्य संख्याएँ हैं।

टिप्पणी : संख्या 1 न तो भाज्य है और न ही अभाज्य है।

वस्तुत: इस प्रकार की यह अकेली संख्या है। यदि इसके अतिरिक्त कोई भी संख्या लें, तो वह या तो भाज्य होगी अथवा अभाज्य।

हम अभाज्य संख्याओं को किस प्रकार ज्ञात करते हैं? सदियों से यह प्रश्न सभी गणितज्ञों को उद्वेलित करता रहा था। ईसा से लगभग तीन शताब्दी पूर्व एक यूनानी गणितज्ञ *इरेटोस्थींज (Eratosthenes)* ने अभाज्य संख्याओं को प्राप्त करने की बहुत सरल विधि खोजी थी। इस विधि को इरेटोस्थींज की छलनी (Sieve of Erotosthenes) कहा जाता है । यहाँ हम इसे 1 से 100 तक की सभी अभाज्य संख्याएँ प्राप्त करने के लिए प्रदर्शित कर रहे हैं।

पहले हम 1 से 100 तक की सभी संख्याओं की एक सारणी बनाते हैं (देखिए सारणी 1)। इसके बाद हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करते हैं :

(i) 1 को काट देते हैं, क्योंकि 1 अभाज्य नहीं है।

(ii) 2 के चारों ओर एक गोल घेरा बना देते हैं और इसके सभी गुणजों, जैसे 4, 6, 8, ... आदि को काट देते हैं।

(iii) अब अगली बिना कटी संख्या 3 को गोल घेरे में बंद कर इसके सभी गुणजों 6, 9, 12, ... आदि को काट देते हैं।

(iv) चरण (iii) को दोहराते हैं, अर्थात् अगली बिना कटी संख्या, जो कि 5 है, को गोल घेरे में बंद कर इसके सभी गुणजों को काट देते हैं।

(v) जब तक सभी संख्याएँ या तो कट नहीं जातीं या गोले से घिर नहीं जाती हम तब तक उपर्युक्त प्रक्रिया दोहराते रहते हैं।

इस प्रकार प्राप्त सारणी में गोले से घिरी सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं तथा 1 को छोड़कर सभी कटी हुई संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं।

सारणी 1

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

अभाज्य संख्याओं के बारे में हम निम्नलिखित तथ्यों पर दृष्टिपात कर सकते हैं:

(i) *अभाज्य संख्याएँ असीमित हैं।* 2 अभाज्य संख्या है तथा $2+1=3$ भी अभाज्य संख्या है। इसी प्रकार, 2 व 3 अभाज्य संख्याएँ हैं तथा $2 \times 3 + 1 = 7$ भी एक अभाज्य संख्या है। 2, 3, 5 अभाज्य संख्याएँ हैं तथा $2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$ भी एक अभाज्य संख्या है। इस प्रकार अभाज्य संख्याओं की सहायता से नई अभाज्य संख्याएँ प्राप्त की जा सकती हैं। अत: अभाज्य संख्याओं की संख्या सीमित नहीं हो सकती। इसका अर्थ है कि हमें चाहे कितनी भी अधिक संख्या में अभाज्य संख्याएँ दी हों, हम एक ऐसी अभाज्य संख्या प्रात कर सकते हैं जो दी गई अभाज्य संख्याओं से भिन्न (तथा बड़ी) होगी।

(ii) *कोई भी अभाज्य संख्या सबसे बड़ी अभाज्य संख्या नहीं हो सकती।* यदि कोई संख्या सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है, तो अभाज्य संख्याओं की संख्या सीमित हो जाएगी जबकि ऐसा नहीं है।

(iii) *संख्या 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है।*

(iv) *2 के अतिरिक्त सभी अभाज्य संख्याएँ विषम हैं।*

(v) *1 के अतिरिक्त कोई भी संख्या या तो अभाज्य होती है अथवा उसका एक*

अभाज्य गुणनखंड होता है। यदि हम एक भाज्य संख्या के गुणनखंड करें और फिर इन गुणनखंडों के गुणनखंड (यदि संभव हो तो) करते चले जाएँ, तो अन्त में केवल अभाज्य गुणनखंड (तथा 1) ही शेष बचेंगे।

उदाहरणार्थ: $12 = 1 \times 12 = 1 \times 2 \times 6 = 1 \times 2 \times 2 \times 3$

3.4 गुणज व गुणनखंडों के कुछ गुण

हमें ज्ञात है कि 4 संख्या 32 का एक गुणनखंड है तथा 32 संख्या 96 का एक गुणनखंड है। हम यह भी जानते हैं कि 4 संख्या 96 का भी एक गुणनखंड है। इसी प्रकार, 3 संख्या 24 तथा 24 संख्या 48 का एक गुणनखंड है। यहाँ भी हम जानते हैं कि 3 संख्या 48 का एक गुणनखंड है। यहाँ हमें जो गुण प्राप्त होता है वह इस प्रकार है:

गुण I: ***यदि a संख्या b का गुणनखंड है और b संख्या c का गुणनखंड है, तो a संख्या c का भी एक गुणनखंड होता है।***

ध्यान दीजिए कि यदि हमें किसी संख्या के गुणनखंड प्राप्त करने हैं, तो गुण I के कारण हम संभावित गुणनखंडों के खोजने के लिए, छोटी संख्याओं की ही जाँच कर सकते हैं। बड़ी संख्याओं का संभावित गुणनखंडों के रूप में जाँच करना अनावश्यक है। उदाहरण के लिए, यदि हमें 84 के गुणनखंड ज्ञात करने हैं, तो हम जाँच के लिए 2 से प्रारंभ कर सकते हैं। जैसे $84 = 2 \times 42$ है। अब हम 84 के स्थान पर 42 से प्रारंभ करते हैं। हम जानते हैं कि 42 के सभी गुणनखंड 84 के भी गुणनखंड होंगे।

ये सभी तथ्य निम्नलिखित गुण से प्राप्त होते हैं :

गुण II : ***यदि p व q अभाज्य संख्याएँ हैं तथा दोनों ही किसी संख्या a के गुणनखंड हैं, तो $p \times q$ भी a का एक गुणनखंड होगा।***

इस गुण को हम कुछ उदाहरणों से स्पष्ट करेंगे। संख्या 20 पर विचार करें। अभाज्य संख्याएँ 2 व 5 दोनों ही 20 के गुणनखंड हैं। साथ ही, $2 \times 5 = 10$ भी 20 का एक गुणनखंड है। इसी प्रकार, हम कह सकते हैं कि 15 संख्या 90 का एक गुणनखंड है, क्योंकि 3 व 5 दोनों ही 90 के गुणनखंड हैं, दोनों ही अभाज्य संख्याएँ हैं तथा $3 \times 5 = 15$ है। गुण II केवल दो अभाज्य संख्याओं तक ही सीमित नहीं है। यह तीन व अधिक अभाज्य संख्याओं के लिए भी सत्य है। उदाहरणार्थ 2, 3 व 5 सभी 90 के गुणनखंड हैं।

अत: $2 \times 3 \times 5 = 30$ भी 90 का गुणनखंड है।
गुणनखंडों का एक अन्य उपयोगी गुण निम्न है:

गुण III: ***यदि a संख्याओं b व c दोनों का गुणनखंड है, तो a इनके योग $b + c$ का भी गुणनखंड होगा।***

इस गुण को स्पष्ट करने के लिए हम एक उदाहरण लेते हैं। 3 संख्या 45 का एक गुणनखंड है। 3 संख्या 72 का भी एक गुणनखंड है। अत: 3 संख्या 45 + 72 = 117 का भी एक गुणनखंड होना चाहिए। इसकी जाँच करने पर हम पाते हैं कि यह सत्य है। इसी प्रकार, 7 संख्या 875 का एक गुणनखंड है तथा 7 संख्या 763 का भी एक गुणनखंड है। साथ ही, 7 संख्या 875 + 763 = 1638 का भी एक गुणनखंड है।

यहाँ संख्याओं के योग की ही यह विशेषता नहीं है। यदि हम योग के स्थान पर दोनों संख्याओं का अन्तर ज्ञात करें, तो वह संख्या प्राप्त अन्तर का भी गुणनखंड होती है। उपर्युक्त उदाहरण में हम देख सकते हैं कि 3 संख्या 72 – 45 = 27 का भी गुणनखंड है। इसी प्रकार, 7 संख्या 875 – 763 = 112 का भी एक गुणनखंड है। वास्तव में गुणनखंडों के लिए हमें निम्नलिखित गुण प्राप्त हैं:

गुण IV : ***यदि a दो संख्याओं b व c का गुणनखंड है, तो a संख्या $b - c$ का भी एक गुणनखंड होगा।***

उदाहरण 2: (i) 11 संख्याओं 121, 165 व 209 सभी का एक गुणनखंड है। इन तथ्यों व गुणनखंड के गुणों का प्रयोग करते हुए, दिखाइए कि 11 संख्याओं 286 व 374 दोनों का एक गुणनखंड है।

(ii) 13 संख्याओं 1170 व 663 का एक गुणनखंड है। दिखाइए कि 13 संख्या 507 का एक गुणनखण्ड है।

हल :

(i) 11 संख्याओं 121 व 165 का एक गुणनखंड है। अत: 11 संख्या 121 + 165 = 286 का भी एक गुणनखंड है। इसी प्रकार, 11 संख्या 165 + 209 = 374 का भी एक गुणनखंड है।

(ii) 13 संख्याओं 1170 व 663 का एक गुणनखंड है। अत: 13 संख्या 1170 – 663 = 507 का भी एक गुणनखंड है।

●●●

प्रश्नावली 3.1

1. निम्न में से प्रत्येक के सभी गुणनखंड लिखिए :

   (i) 17 (ii) 60 (iii) 23 (iv) 64

   (v) 50 (vi) 84 (vii) 76 (viii) 89

   (ix) 125 (x) 144 (xi) 253 (xii) 729

2. निम्न में से प्रत्येक के पहले 5 गुणज लिखिए :

   (i) 16 (ii) 17 (iii) 19 (iv) 25 (v) 40

3. निम्न में से कौन सी संख्याओं का गुणनखंड 15 है?

   (i) 15625 (ii) 123015 (iii) 151230

4. निम्न में से कौन-सी संख्याएँ 21 से विभाजित हो जाती हैं?

   (i) 21063 (ii) 20163 (iii) 21630

5. निम्न के बीच की सभी अभाज्य संख्याएँ लिखिए :

   (i) 1 से 30 (ii) 80 से 100 (iii) 78 से 158

   (iv) 101 से 179 (v) 160 से 200

6. कितनी सम संख्याएँ अभाज्य हैं?

7. निम्न में से कौन-सी संख्याएँ अभाज्य हैं?

   (i) 23 (ii) 26 (iii) 31

   (iv) 51 (v) 109 (vi) 1729

8. क्या कोई भाज्य संख्या विषम हो सकती है? यदि हाँ, तो सबसे छोटी विषम भाज्य संख्या लिखिए।

9. 100 से कम ऐसी सात क्रमागत भाज्य संख्याएँ लिखिए जिनके बीच में कोई अभाज्य संख्या न हो।

10. किसी संख्या के इकाई के स्थान पर 5 का अंक है। यदि वह संख्या 150 और 200 के मध्य हो, तो वह भाज्य संख्या होगी या अभाज्य?

11. 10 से बड़ी किसी संख्या के अभाज्य होने के लिए उसके इकाई के स्थान पर कौन-कौन से अंक सम्भव होंगे?

12. (i) क्या कोई ऐसी संख्या है जिसके कोई गुणनखंड न हों?

(ii) 1 से 100 तक के मध्य की कितनी संख्याओं के केवल तीन ही गुणनखंड होते हैं?

13. निम्न में से प्रत्येक संख्या को दो विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में लिखिए :

(i) 32 (ii) 40 (iii) 56 (iv) 80 (v) 96 (vi) 100

14. निम्न में से प्रत्येक को तीन विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में लिखिए :

(i) 31 (ii) 35 (iii) 49 (iv) 63

3.5 विभाज्यता की जाँच

यदि कोई संख्या अभाज्य नहीं है, तो यह किसी छोटी संख्या से विभाजित होनी चाहिए। इस बात की जाँच करने के लिए कि एक संख्या दूसरी संख्या को विभाजित करती है अथवा नहीं, हम भाग की वास्तविक क्रिया को करके देख सकते हैं कि शेष शून्य है अथवा अशून्य। ऐसा करने में समय तो लगता ही है, परन्तु कुछ परिस्थितियों में यह अनावश्यक भी है। विभाज्यता की जाँच करने के लिए कुछ सरल नियम हैं जो संख्याओं के अंकों पर लागू कर हम जान सकते हैं कि वह संख्या किसी दी गई निश्चित संख्या से विभाजित हो सकती है अथवा नहीं। यहाँ इसी प्रकार के कुछ नियम दिए जा रहे हैं:

(i) 2 से विभाज्यता : यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 2 से विभाजित होता है तो वह संख्या भी 2 से विभाजित होगी।

इस नियम के अनुसार यदि कोई संख्या 0, 2, 4, 6 अथवा 8 के अंक पर समाप्त होती है, तो वह संख्या 2 से विभाज्य है। इस नियम के अनुसार 1, 3, 5, 7 व 9 पर समाप्त होने वाली कोई भी संख्या 2 से विभाजित नहीं होगी। 3212, 698, 722 आदि सभी संख्याएँ 2 द्वारा विभाज्य हैं जबकि 2231, 869, 227 संख्याएँ 2 से विभाजित नहीं हो सकतीं।

(ii) 3 द्वारा विभाज्यता : कोई संख्या 3 से विभाजित होगी, यदि इसके अंकों का योग 3 से विभाजित होता है।

संख्या 4521 संख्या 3 द्वारा विभाजित होती है क्योंकि इसके अंकों का योग 4 + 5 + 2 + 1 = 12, 3 द्वारा विभाज्य है। इसी प्रकार 2145, 5142 तथा 1524 सभी 3 से विभाज्य हैं। हम जाँच कर सकते हैं कि संख्याएँ 72279, 369, 3438 भी 3 द्वारा विभाज्य हैं। 7279, 2639 तथा 3437 में से कोई भी संख्या 3 से विभाजित नहीं हो सकती, क्योंकि इनके अंकों के योग क्रमश: 25, 20 तथा 17 हैं और ये संख्याएँ 3 द्वारा विभाज्य नहीं हैं।

(iii) 5 द्वारा विभाज्यता : वह संख्या जिसके अन्त में (अर्थात् इकाई के स्थान पर) 0 अथवा 5 है सदैव 5 से विभाजित होगी।

उदाहरणार्थ, संख्याएँ 165, 370, 6985, 320 सभी 5 द्वारा विभाज्य हैं, जबकि संख्याएँ 133, 27, 39756, जिनके अन्त में न तो 0 है न 5, 5 द्वारा विभाजित नहीं की जा सकतीं।

(iv) 9 से विभाज्यता : कोई संख्या 9 से विभाजित होगी यदि उसके अंकों का योग 9 का एक गुणज हो, अर्थात् 9 से विभाज्य हो।

संख्या 8271 संख्या 9 से विभाज्य है, क्योंकि इसके अंकों का योग 8 + 2 + 7 + 1 = 18, संख्या 9 का एक गुणज है। 628 को 9 से विभाजित नहीं किया जा सकता, क्योंकि 6 + 2 + 8 = 16, 9 द्वारा विभाजित नहीं होती।

(v) 10 द्वारा विभाज्यता : कोई भी संख्या जिसके इकाई के स्थान पर 0 है 10 द्वारा विभाज्य होगी।

1000, 750, 2300 सभी 10 से विभाज्य हैं, जबकि संख्याएँ 147, 1075, 309 जिनके अन्त में शून्य नहीं है, 10 द्वारा विभाजित नहीं होती।

(vi) 11 द्वारा विभाज्यता : आइए संख्याओं 121, 1265, 1727 तथा 92829 पर विचार करें। ये सभी संख्याएँ 11 से विभाजित की जा सकती हैं। इस तथ्य की जाँच हम सीधे विभाजन की क्रिया से कर सकते हैं। क्या इन संख्याओं के अंकों में कोई संबंध है जैसा कि 3 अथवा 9 द्वारा विभाज्य संख्याओं के अंकों में होता है? इन संख्याओं में हम इकाई के स्थान से प्रारंभ करते हुए विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग करते हैं। इसी प्रकार, शेष बचे (अर्थात् सम स्थानों पर स्थित) अंकों

का योग लेते हैं और फिर इन दोनों योगों का अन्तर ज्ञात करते हैं। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है:

संख्या	*विषम स्थानों के अंकों का योग*	*सम स्थानों के अंकों का योग*	*दोनों योगों का अंतर*
121	1 + 1 = 2	2	0
1265	5 + 2 = 7	6 + 1 = 7	0
1727	7 + 7 = 14	2 + 1 = 3	11
92829	9 + 8 + 9 = 26	2 + 2 = 4	22

हम देखते हैं कि दोनों योगों का अन्तर या तो शून्य है अथवा 11 का एक गुणज है। ये महज संयोग नहीं हैं। यह 11 से विभाज्यता का एक व्यापक नियम है:

एक संख्या 11 से विभाजित होगी, यदि इकाई के स्थान से प्रारंभ कर विषम स्थानों पर स्थित अंकों के योग और सम स्थानों पर स्थित अंकों के योग का अन्तर 0 अथवा 11 का एक गुणज है, अर्थात् 11 से विभाजित है।

सामान्यत: हम किसी संख्या की विभाज्यता की जाँच केवल अभाज्य संख्याओं द्वारा ही करते हैं। इसका कारण है कि यदि कोई संख्या किसी भाज्य संख्या से विभाजित की जा सकती है, तो वह संख्या एक अभाज्य संख्या से भी विभाजित की जा सकती है। फिर कुछ परिस्थितियों में किसी व्यंजक को शीघ्र सरल करने के लिए हम भाज्य संख्याओं द्वारा भी विभाज्यता की जाँच करते हैं। कुछ सरल साधारण नियमों द्वारा हम भाज्य संख्याओं 4, 6, 8 आदि से भी विभाज्यता की जाँच कर सकते हैं। उदाहरण के लिए 4 द्वारा विभाज्यता की जाँच का नियम निम्न प्रकार है:

(vii) 4 द्वारा विभाज्यता : *कोई संख्या 4 से विभाज्य होगी, यदि उसके इकाई व दहाई के अंकों से बनी संख्या 4 द्वारा विभाज्य हो।*

इस नियम द्वारा हम देख सकते हैं कि संख्याएँ 308, 1016, 40752, व 315976 सभी 4 द्वारा विभाज्य हैं।

●●●

प्रश्नावली 3.2

1. विभाज्यता की जाँच के नियमों का प्रयोग करके, ज्ञात कीजिए कि निम्न में से कौन-कौन सी संख्याएँ 2 से, 3 से, 5 से और 9 से विभाजित हैं:

   (i) 126 (ii) 672 (iii) 990
   (iv) 2050 (v) 2856 (vi) 406839

2. विभाज्यता के जाँच के नियमों की सहायता से ज्ञात कीजिए कि निम्न में से कौन-कौन सी संख्याएँ 4 से विभाजित होंगी:

   (i) 512 (ii) 12159 (iii) 4096
   (iv) 14540 (v) 21084 (vi) 31795012

3. निम्न संख्याओं की 11 द्वारा विभाज्यता की जाँच कीजिए :

   (i) 5335 (ii) 10824 (iii) 9020814
   (iv) 3178965 (v) 70169803 (vi) 10000001

4. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :

   (i) यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य है, तो वह 9 से भी विभाजित होगी।

   (ii) यदि कोई संख्या 9 द्वारा विभाज्य है, तो वह 3 से भी विभाजित होगी।

   (iii) यदि कोई संख्या 9 और 10 दोनों से विभाजित होती है, तो वह संख्या 90 से भी विभाजित होगी।

   (iv) यदि कोई संख्या दो संख्याओं के योग को पूर्णतया विभाजित करे, तो वह उन संख्याओं को पृथक-पृथक भी पूर्णतया विभाजित करेगी।

   (v) यदि एक संख्या तीन संख्याओं को अलग-अलग पूर्णतया विभाजित करती है, तो वह उनके योग को भी पूर्णतया विभाजित करेगी।

   (vi) दो क्रमागत विषम संख्याओं का योग सदैव 4 से विभाजित होता है।

3.6 अभाज्य गुणनखंडन

किसी भाज्य संख्या का गुणनखंडन कई प्रकार से किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, संख्या 60 के गुणनखंडन हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

(i) $60 = 2 \times 30$ (ii) $60 = 3 \times 20$ (iii) $60 = 4 \times 15$

(iv) $60 = 5 \times 12$ (v) $60 = 6 \times 10$ (vi) $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

ये गुणनखंडन विभिन्न प्रकार के हैं। पहले, दूसरे व चौथे गुणनखंडन में से प्रत्येक में एक गुणनखंड अभाज्य है तथा दूसरा गुणनखंड भाज्य है। तीसरे तथा पाँचवें गुणनखंडन में दोनों गुणनखंड भाज्य हैं। परन्तु छठे गुणनखंडन में प्रत्येक गुणनखंड अभाज्य है।

जिस गुणनखंडन में सभी गुणनखंड अभाज्य होते हैं *अभाज्य गुणनखंडन (Prime Factorization)* कहलाता है। किसी भी गुणनखंडन की अपेक्षा अभाज्य गुणनखंडन का अधिक महत्व है। किसी संख्या का ऐसा गुणनखंडन होना आवश्यक नहीं है जिसके सभी गुणनखंड भाज्य संख्याएँ हों परन्तु उस संख्या का एक अभाज्य गुणनखंडन अवश्य होगा। 6 या 25 जैसी संख्याओं का कोई भी गुणनखंडन ऐसा नहीं है जिसमें सभी भाज्य संख्याएँ हों, परन्तु इन संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडन हो सकते हैं। जैसे

$$6 = 2 \times 3 \text{ व } 25 = 5 \times 5 \text{ हैं।}$$

अभाज्य गुणनखंडन का दूसरा महत्वपूर्ण गुण है कि यह **अद्वितीय** होता है। किसी संख्या के ऐसे अनेक गुणनखंडन हो सकते हैं जिसमें एक या अधिक गुणनखंड भाज्य संख्याएँ हों जैसा कि हमने संख्या 60 के बारे में देखा। परंतु सभी अभाज्य गुणनखंडों वाला गुणनखंडन एक और केवल एक ही होता है। हम गुणनखंडन $2 \times 3 \times 2 \times 5$ और गुणनखंडन $2 \times 2 \times 3 \times 5$ में कोई अन्तर नहीं करते क्योंकि हम जानते हैं कि $2 \times 3 = 3 \times 2$, अर्थात् गुणनखंडन में गुणनखंडों के क्रम का कोई महत्व नहीं है। इस प्रकार प्रत्येक भाज्य संख्या का एक और केवल एक ही अभाज्य गुणनखंड होता है। संख्याओं का यह गुण *अभाज्य गुणखंडन गुण* अथवा *अंकगणित का मूलभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmetic)* कहलाता है। यह गुण इतना मूलभूत क्यों है यह आगे चलकर ज्ञात होगा।

किसी भाज्य संख्या n का अभाज्य गुणनखंडन प्राप्त करने की विधि इस प्रकार है:

चरण 1: वह सबसे छोटी अभाज्य संख्या p प्राप्त कीजिए जो n को विभाजित करती है और लिखिए

$$n = p \times m$$

चरण 2: यदि m एक अभाज्य संख्या है, तो हमें अभाज्य गुणनखंडन प्राप्त हो गया अन्यथा चरण 1 की तरह m को विभाजित करने वाली सबसे छोटी

अभाज्य संख्या q प्राप्त कीजिए और लिखिए:

$$m = q \times r,$$

$$\text{अर्थात्} \quad n = p \times m = p \times q \times r$$

यह प्रक्रिया तब तक दोहराते रहिए जब तक एक भाज्य गुणनखंड प्राप्त होता रहे। सभी गुणनखंड अभाज्य होने पर विधि सम्पन्न हो जाती है।

उदाहरण 3: संख्या 420 का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए।

हल: संख्या 420, 2 से विभाज्य है और 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है।

अत: $420 = 2 \times 210$

पुन: $210 = 2 \times 105$

अत: $420 = 2 \times 2 \times 105$

105 अभाज्य संख्या 3 से विभाज्य है और

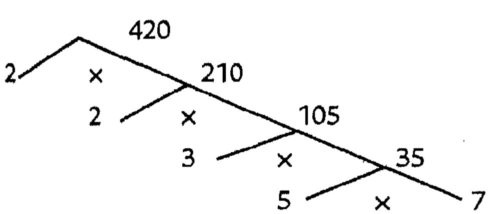
$105 = 3 \times 35$

इस प्रकार $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 35$

अभी भी 35 एक भाज्य गुणनखंड है। चरण 1 के अनुसार $35 = 5 \times 7$

इस प्रकार, $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$

यहाँ सभी गुणनखंड अभाज्य हैं। अत: यही 420 का अभाज्य गुणनखंडन है। उपर्युक्त प्रक्रिया को हम निम्न प्रकार दर्शा सकते हैं:



$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$

2	420
2	210
3	105
5	35
	7

$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$

●●●

प्रश्नावली 3.3

1. निम्न में से प्रत्येक संख्या के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए :

(i) 48 (ii) 34 (iii) 98 (iv) 216
(v) 525 (vi) 468 (vii) 441 (viii) 540

(ix) 9000 (x) 1024 (xi) 2145 (xii) 7325

2. 5 अंकों की सबसे छोटी संख्या लिखिए और उसे अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।
3. 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या लिखिए और उसका अभाज्य गुणनखंडन कीजिए।
4. 1729 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए और उन्हें बढ़ते हुए क्रम में लिखिए। इनमें दो क्रमागत गुणनखंडों के मध्य संबंध ज्ञात कीजिए।

3.7 महत्तम समापवर्तक (म.स.)

दो या दो से अधिक संख्याओं का *महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor)* या *म.स. (HCF)* वह एक अद्वितीय संख्या है जो

1. सभी संख्याओं का गुणनखंड अर्थात् सर्वनिष्ठ गुणनखंड (Common Factor) होती है तथा
2. सभी सर्वनिष्ठ गुणनखंडों में सबसे बड़ी होती है।

उदाहरण के लिए, आइए संख्याओं 12 तथा 16 पर विचार करें ।

12 के गुणनखंड हैं: 1, 2, 3, 4, 6 व 12

16 के गुणनखंड हैं : 1, 2, 4, 8 व 16

यहाँ सर्वनिष्ठ गुणनखंड हैं: 1, 2 व 4 । इन सबमें 4 सबसे बड़ा गुणनखंड है। अर्थात् 4, संख्याओं 12 और 16 का महत्तम समापवर्तक (म. स.) है।

टिप्पणी: महत्तम समापर्वक को महत्तम सर्वनिष्ठ विभाजक(greatest common divisor या GCD) भी कहते हैं।

दो या अधिक संख्याओं का म.स. ज्ञात करने के लिए सामान्यत: जिन विधियों का प्रयोग होता है वे हैं: ***अभाज्य गुणनखंडन*** *विधि* तथा *वितत (continued)* ***विभाजन विधि*** अब हम इन विधियों पर चर्चा करेंगे।

3.7.1 अभाज्य गुणनखंडन विधि

यह विधि तीन चरणों में संपन्न होती है :

चरण 1: दी हुई संख्याओं में से प्रत्येक का अभाज्य गुणनखंडन लिखिए।

चरण 2: सभी गुणनखंडनों में से सर्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड प्राप्त कीजिए।

चरण 3: अभीष्ट म.स. प्राप्त करने के लिए सर्वनिष्ठ गुणनखंडों का गुणन कीजिए।

उदाहरण 4 : **संख्याओं 24 व 40 का म.स. ज्ञात कीजिए।**

हल: चरण 1: $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

चरण 2: सर्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड हैं: 2, 2 और 2

चरण 3: म. स. $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

म. स. प्राप्त करने की इस विधि को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं:

चरण 1: सभी संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड प्रयुक्त अभाज्य संख्याओं की घात के रूप में लिखिए।

चरण 2: सभी गुणनखंडों में आने वाली अभाज्य संख्याएं प्राप्त कीजिए। यदि इनमें कोई भी ऐसी अभाज्य संख्या नहीं है, तो म.स. 1 है। यदि कुछ ऐसी अभाज्य संख्या सर्वनिष्ठ हैं, तो प्रत्येक सर्वनिष्ठ अभाज्य संख्याएं की वह घात प्राप्त कीजिए जो उन सब गुणनखंडों में न्यूनतम है।

चरण 3: सभी अभाज्य सर्वनिष्ठ अभाज्य संख्याओं की न्यूनतम घात लेकर गुणा करते हैं और म.स. प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 5 : 144, 180 व 192 का म. स. ज्ञात कीजिए।

हल: चरण 1: $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^6 \times 3^1$

चरण 2: सर्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड हैं: 2 व 3। यहाँ 2 की न्यूनतम घात 2 (180 में) तथा 3 की न्यूनतम घात 1 (192 में) है।

चरण 3: म. स. $= 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$

उदाहरण 6 : 27 व 80 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल: चरण 1: $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 5^1$

चरण 2: यहाँ कोई भी गुणनखंड सर्वनिष्ठ (उभयनिष्ठ) नहीं है। अतः म.स. $= 1$ है।

उपर्युक्त विधि से म.स. ज्ञात करने के लिए हमें सभी संख्याओं के अभाज्य

गुणनखंडन ज्ञात होने चाहिए। जब संख्याएँ छोटी होती हैं, तो उनका अभाज्य गुणनखंडन प्राप्त करने में अधिक कठिनाई नहीं होती। परंतु जब संख्याएँ बड़ी होती हैं और उनके अभाज्य गुणनखंड बड़े होते हैं, तो यह विधि सुविधाजनक नहीं है। इस स्थिति में म.स. ज्ञात करने के लिए, हम एक वैकल्पिक विधि **'वितत विभाजन विधि'** का प्रयोग करते हैं।

3.7.2 वितत विभाजन विधि

इस विधि द्वारा हम दो संख्याओं. का म.स. निम्न चरणों में प्राप्त करते हैं:

चरण 1: बड़ी संख्या को छोटी संख्या से विभाजित कर शेष प्राप्त कीजिए।

चरण 2: यदि शेष शून्य है, तो छोटी संख्या म.स. है। यदि शेष शून्य नहीं है, तो छोटी संख्या को शेष से विभाजित कर नया शेष प्राप्त कीजिए।

चरण 3: यदि नया शेष शून्य है, तो पिछला भाजक म.स. है। यदि शेष शून्य नहीं है, तो इस शेष से पिछले भाजक को भाग दीजिए! यह प्रक्रिया तब तक दोहराते रहिए जब तक शेष शून्य न हो जाए। शेष शून्य होने पर अंतिम भाजक म.स. होगा।

यदि दो से अधिक संख्याएँ हैं, तो पहले हम किन्हीं भी दो संख्याओं का म.स. निकालते हैं। फिर शेष संख्याओं में से किसी एक संख्या और पिछले म.स. का म.स. निकालते हैं। यह प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक सभी संख्याओं पर विचार न हो जाए। अंतिम म.स. ही अभीष्ट म.स. होगा। यह अंतिम म.स. संख्याओं के क्रम पर निर्भर नहीं करता। परन्तु यदि हम संख्याओं को बढ़ते क्रम में लें, तो कार्य विधि कुछ सरल हो जाती है।

उदाहरण 7 : 24 व 40 का म. स. ज्ञात कीजिए।

हल:

चरण 1: 24)40(1
24

चरण 2: 16)24(1
16

चरण 3: 8)16(2
16

0

इस प्रकार, 24 व 40 का म.स. 8 है।

उदाहरण 8: 144, 180 व 192 का म.स. ज्ञात कीजिए।

```
144)180(1
    144
    ---
     36)144(4
        144
        ---
          0
```

इस प्रकार, 144 व 180 का म.स. 36 है। अब हम 36 व 192 का म.स. ज्ञात करेंगे।

```
36)192(5
   180
   ---
    12)36(3
       36
       --
        0
```

अत: 144, 180 व 192 का म. स. 12

टिप्पणी: जब दो संख्याओं में कोई भी गुणनखंड उभयनिष्ठ नहीं हो, तो उनका म.स. 1 होता है। इस प्रकार की संख्याएँ ***असहभाज्य (coprimes)*** कहलाती हैं। संख्याओं 9 व 20 में कोई भी गुणनखंड उभयनिष्ठ नहीं है। अत: 9 व 20 असहभाज्य संख्याएँ है। यदि p व q दो भिन्न अभाज्य संख्याएँ हैं तो p व q का म.स. 1 है। अर्थात् भिन्न अभाज्य संख्याएँ असहभाज्य संख्याएँ होती हैं। असहभाज्य संख्याओं का अभाज्य होना आवश्यक नहीं है। संख्याएँ 9 व 20 असहभाज्य संख्याएँ है, परंतु इनमें से कोई भी अभाज्य संख्या नहीं है।

●●●

प्रश्नावली 3.4

1. अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा निम्न में से प्रत्येक का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए :

(i) 144, 198 (ii) 81, 117

(iii) 47, 61 (iv) 225, 450

(v) 13, 39, 273
(vi) 150, 140, 210
(vii) 120,144,204
(viii) 106,159,265
(x) 625, 3125, 15625
(ix) 101, 573, 1079

2. वितत विभाजन विधि द्वारा निम्न संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए:
(i) 300, 450
(iv) 935, 1320
(ii) 442, 1261
(v) 1624,522,1276
(iii) 252, 576
(vi) 2241, 8217, 747

3. यह ज्ञात है कि 65610 को 27 से विभाजित कर सकते हैं। 65610 के निकटतम ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 27 से विभाज्य हों।

4. दो क्रमागत संख्याओं का महत्तम समापवर्तक क्या होगा?

5. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 245 और 1029 को भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेष 5 बचे।

6. दो टैंकरों में क्रमशः 850 लीटर और 680 लीटर पेट्रोल आता है। मापने वाले ऐसे बर्तन की अधिकतम धारिता ज्ञात कीजिए जिससे प्रत्येक टैंकर का पेट्रोल पूरा-पूरा मापा जा सके।

7. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 398, 436 और 542 को भाग देने पर क्रमशः 7, 11 और 15 शेष बचे।

[**संकेत**: 398–7, 436–11, तथा 542–15 का म.स. ज्ञात कीजिए।]

8. किसी कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 8 मी 25 सेमी, 6 मी 75 सेमी और 4 मी 50 सेमी हैं। ऐसी बड़ी से बड़ी छड़ की लंबाई ज्ञात कीजिए जिससे कमरे की तीनों मापों को पूरा-पूरा मापा जा सके।

9. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:
(i) दो भिन्न अभाज्य संख्याओं का म.स. 1 होता है।
(ii) दो असहभाज्य संख्याओं का म.स. 1 होता है।
(iii) एक सम संख्या व एक विषम संख्या का म.स. एक सम संख्या होता है।
(iv) दो क्रमागत सम संख्याओं का म.स. 2 होता है।
(v) दो क्रमागत विषम संख्याओं का म.स. 2 होता है।

3.8 लघुतम समापवर्त्य (ल.स.)

दो या दो से अधिक संख्याओं का *लघुतम समापवर्त्य (ल.स. Least Common Multiple,LCM)* वह संख्या है जो (i) इन सभी संख्याओं का एक गुणज (अपवर्त्य) होती है और (ii) सभी सर्वनिष्ठ गुणजों में सबसे छोटी होती है। उदाहरणार्थ 8 के गुणज हैं: 8, 16, 24, ... और 12 के गुणज हैं: 12, 24, 36, ... । यहाँ सर्वनिष्ठ गुणज (समापवर्त्य) हैं: 24, 48, ... हैं। इनमें सबसे छोटी संख्या 24 है। अत: 8 व 12 का लघुतम समापवर्त्य 24 है। ध्यान दीजिए कि ल.स. 24 संख्याओं 8 व 12 दोनों से बड़ा है।

ल.स. ज्ञात करने के लिए सामान्यत: दो विधियों का प्रयोग किया जाता है। ये विधियाँ हैं: अभाज्य गुणनखंडन विधि तथा सर्वनिष्ठ गुणनखंड विधि।

3.8.1 अभाज्य गुणनखंडन विधि

इस विधि में हम प्रत्येक संख्या के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करते हैं और अभाज्य संख्याओं को घात के रूप में लिखते हैं। इसके बाद इन सभी अभाज्य संख्याओं की (सभी गुणनखंडनों में)उपलब्ध अधिकतम घात लेकर गुणा करते हैं। यह गुणनफल ही ल.स. होगा ।

उदाहरण 9 : ल. स. ज्ञात कीजिए:

(i) 24 व 40 का (ii) 40, 48 व 75 का

हल: (i) यहाँ $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3^1$

तथा $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5^1$

यहाँ अभाज्य गुणनखंड हैं: 2, 3 व 5 तथा सभी गुणनखंडनों में इनकी अधिकतम घात क्रमश: 3, 1 व 1 हैं।

अत: ल. स. $= 2^3 \times 3^1 \times 5^1 = 120$

(ii) यहाँ $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5^1$

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^1$

तथा $75 = 3 \times 5 \times 5 = 3^1 \times 5^2$

यहाँ अभाज्य गुणनखंड 2, 3 व 5 हैं तथा इनकी अधिकतम घात क्रमश: 4, 1 व 2 हैं। अत:

ल. स. $= 2^4 \times 3^1 \times 5^2 = 1200$

3.8.2 सर्वनिष्ठ विभाजन विधि

इस विधि में हम ल. स. निम्न प्रकार प्राप्त करते हैं :

1. सभी संख्याओं को अलग-अलग परन्तु एक ही पंक्ति में लिखते हैं।
2. वह छोटी से छोटी अभाज्य संख्या खोजते हैं जो इस पंक्ति में लिखी कम से कम एक संख्या को विभाजित करती है ।
3. इस अभाज्य संख्या से विभाजित हो सकने वाली संख्याओं को विभाजित कर भागफल उन संख्याओं के नीचे दूसरी पंक्ति में लिखते हैं। जो संख्याएँ इस अभाज्य संख्या से विभाजित नहीं होती उन्हें दूसरी पंक्ति में ऐसे ही लिख लेते हैं।
4. अब चरणों 2 व 3 को दूसरी पंक्ति के लिए दोहराते हुए तीसरी पंक्ति प्राप्त करते हैं। यह प्रक्रिया तब तक करते जाते हैं जब तक ऐसी पंक्ति न प्राप्त हो जाए जिसमें सभी स्थानों पर 1 हो।
5. इस प्रकार प्राप्त सभी अभाज्य भाजकों का गुणनफल ही ल.स. हैं।

उदाहरण 10: संख्याओं 20, 25, 30 व 40 का ल. स. ज्ञात कीजिए।

हल: संख्याएँ हैं: 20, 25, 30 व 40 (चरण 1)

यहाँ संख्याएँ 20, 30 व 40 संख्या 2 से विभाजित होती हैं (चरण 2)

2	20,25,30,40	(चरण 2 व 3)
2	10,25,15,20	(चरण 2 व 3)
2	5,25,15,10	(चरण 2 व 3)
3	5,25,15,5	(चरण 2 व 3)
5	5,25,5,5	(चरण 2 व 3)
5	1, 5, 1, 1	(चरण 2 व 3)
	1, 1, 1,1	

ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 600$ (चरण 5)

उदाहरण 11: 198, 135, 108, 54 व 22 का ल.स ज्ञात कीजिए ।

हल:

2	198, 135, 108, 54, 22
2	99, 135, 54, 27, 11
3	99, 135, 27, 27, 11

3	33, 45, 9, 9, 11
3	11, 15, 3, 3, 11
5	11, 5, 1, 1, 11
11	11, 1, 1, 1, 11
	1, 1, 1, 1, 1

अत : ल. स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 = 5940$

उदाहरण 12: वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 12, 16, 24 व 36 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 7 शेष बचता है:

हल : 12, 16, 24 व 36 से पूर्णतया विभाजित होने वाली छोटी से छोटी संख्या इन संख्याओं का ल. स. होती है। अत: वांछित संख्या इस ल.स. से 7 अधिक होनी चाहिए। ल.स. ज्ञात करने के लिए हम निम्न प्रक्रिया करते हैं:

2	12, 16, 24 36
2	6, 8, 12, 18
2	3, 4, 6, 9
2	3, 2, 3, 9
3	3, 1, 3, 9
3	1, 1, 1, 3
	1, 1, 1, 1

इस प्रकार ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

अतः अभीष्ट संख्या $144 + 7 = 151$ है।

3.9 म.स. और ल.स. के कुछ गुण

1. किन्ही दी हुई संख्याओं का म. स. उन संख्याओं में से सबसे छोटी संख्या के बराबर अथवा उससे कम होता है।
2. किन्ही दी हुई संख्याओं का ल. स. उन संख्याओं में से सबसे बड़ी संख्या के बराबर अथवा उससे बड़ा होता है।

3. दो संख्याओं a व b का म. स a व b के ल.स. का भाजक होता है। इसी प्रकार a व b का ल.स. a व b के म. स. का गुणज होता है।

4. यदि दो संख्याओं का म.स. उन दोनों संख्याओं में से किसी एक के बराबर होता है, तो उनका ल.स. दूसरी संख्या के बराबर होता है।

5. दो असहभाज्य संख्याओं का ल.स. उनका गुणनफल होता हैं।

6. दो संख्याओं a और b के ल. स. तथा म. स. का गुणनफल उन संख्याओं के गुणनफल $a \times b$ के बराबर होता है।

गुण 6 एक अत्यंत महत्वपूर्ण गुण है। हम इसे कुछ उदाहरणों से स्पष्ट करेंगे।

संख्याओं 24 व 40 का म.स. 8 है और उनका ल.स. 120 है।

इस प्रकार ल.स. $\times$ म.स. $= 120 \times 8 = 960$

साथ ही, $24 \times 40 = 960$

अतः, ल.स. $\times$ म.स. = दोनों संख्याओं का गुणनफल

अब हम एक और उदाहरण लेते हैं।

संख्याओं 300 व 450 का म. स. 150 है। इन संख्याओं का ल.स. प्राप्त करने के लिए, हम देखते हैं कि $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, तथा

$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

ल. स. $= 2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 900$

अतः ल. स. $\times$ म. स. $= 900 \times 150 = 135000$

साथ ही, $300 \times 450 = 135000$

यहाँ भी हमें वही परिणाम प्राप्त होता है।

इस गुण का महत्व इस तथ्य में है कि यदि हमें दो संख्याओं का म. स. और ल. स. तथा दोनों संख्याओं में से मात्र एक संख्या ज्ञात है, तो हम दूसरी संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 13: दो संख्याओं का म. स. 5 तथा ल. स. 280 है। यदि एक संख्या

35 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: ल. स. × म. स. = 280 × 5 = 1400

∴ पहली संख्या × दूसरी संख्या = 1400

पहली सख्या 35 है।

∴ 35 × दूसरी संख्या = 1400

अतः दूसरी संख्या = 1400 ÷ 35 = 40

उदाहरण 14: दो संख्याओं का गुणनफल 3000 है। यदि उनका म. स. 10 है, तो ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल : ल. स. × म. स. = संख्याओं का गुणनफल

यहाँ म.स. = 10 तथा संख्याओं का गुणनफल = 3000 है।

∴ 10 × ल.स. = 3000

अतः ल.स. = 3000 ÷ 10 = 300

●●●

प्रश्नावली 3.5

1. निम्न में से प्रत्येक में संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए :

(i) 48, 60 (ii) 18, 77

(iii) 12, 15, 45 (iv) 15, 30, 90

(v) 45, 105, 165 (vi) 6, 15, 18, 30

(vii) 180, 384, 144 (viii) 240, 420, 660

(ix) 108, 135, 162 (x) 112, 168, 266

2. संख्याओं के निम्न युग्मों में दर्शाइए कि महत्तम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य का गुणनफल इन संख्याओं के गुणनफल के बराबर है :

(i) 14, 21 (ii) 117, 221 (iii) 25, 65 (iv) 27, 90

3. यदि दो संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य 16 और उनका गुणनफल 64 है, तो

उनका महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

4. क्या तीन संख्याओं का गुणनफल सदैव उनके महत्तम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य के गुणनफल के बराबर होता है?

5. दो संख्याओं के महत्तम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य क्रमशः 13 और 1989 हैं। यदि उनमें से एक संख्या 117 हो, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

6. क्या दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक 14 और लघुतम समापवर्त्य 204 हो सकता है? सकारण उत्तर दीजिए।

7. एक विद्यालय में छठी कक्षा के दो अनुभाग (Sections) – अनुभाग A और अनुभाग B हैं। अनुभाग A के विद्यार्थी प्रत्येक 32 दिन के अन्तराल पर पहेली प्रतियोगिता आयोजित करते हैं जबकि अनुभाग B के विद्यार्थी यह प्रतियोगिता 36 दिन के अन्तराल पर आयोजित करते हैं। दोनों अनुभाग सत्र के पहले दिन प्रतियोगिता आयोजित करते हैं। दिनों की वह कम से कम संख्या ज्ञात कीजिए जब दोनों अगली बार एक साथ प्रतियोगिता आयोजित करेंगे।

8. एक सड़क के किनारे प्रत्येक 220 मी की दूरी पर टेलीग्राफ के खम्भे स्थित हैं और उसी सड़क के किनारे प्रत्येक 300 मी की दूरी पर पत्थरों के ढेर पड़े हैं। यदि पत्थरों की पहली ढेरी पहले खम्भे के पाद (foot) पर हो, तो उससे कितनी न्यूनतम दूरी पर पत्थरों की ढेरी और किसी खम्भे का पाद एक साथ आएँगे?

9. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे यदि 25, 40 और 60 से भाग दें, तो प्रत्येक स्थिति में 7 शेष बचे।

10. प्रातः कालीन सैर के समय तीन व्यक्ति एक साथ चलना प्रारंभ करते हैं। उनके कदमों की चलने की दूरियाँ क्रमशः 80 सेमी, 85 सेमी और 90 सेमी हैं। इनमें से प्रत्येक कितनी न्यूनतम दूरी चले कि तीनों उस दूरी को पूर्ण कदमों में तय कर सकें?

11. 10000 के निकटतम दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिन्हें 2, 3, 4, 5, 6 और 7 में से प्रत्येक से पूर्णतया विभाजित किया जा सके।

12. 100000 के निकटतम एक ऐसी संख्या ज्ञात कीजिए जो 8, 15 और 21 में से प्रत्येक से पूर्णतया विभाज्य है तथा 100000 से बड़ी है।

13. ट्रैफिक की बत्तियाँ तीन अलग-अलग चौराहों पर क्रमशः 48 सेकंड, 72 सेकंड एवं 108 सेकंड में बदलती हैं। यदि वे प्रातः 7 बजे एक साथ बदलती हैं; तो अगली बार वे कितने समय के बाद साथ-साथ बदलेंगी?

याद रखने योग्य बातें

1. किसी संख्या का गुणनखंड उस संख्या को पूर्णतया विभाजित करता है।
2. किसी संख्या का गुणज उस संख्या से पूर्णतया विभाजित होता है।
3. प्रत्येक संख्या अपना ही गुणज और गुणनखंड होती है।
4. *1 प्रत्येक संख्या का गुणनखंड होता है और यह एक ऐसी संख्या है जो न तो अभाज्य है और न ही भाज्य।*
5. केवल 2 ही एक सम अभाज्य संख्या है।
6. किसी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन अद्वितीय होता है और इसमें गुणनखंडों के क्रम का कोई महत्व नहीं होता।
7. एक संख्या विभाजित होगी :
   (i) 2 से, यदि इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 या 8 हो।
   (ii) 3 से, यदि संख्या के अंकों का योग 3 से विभाजित हो।
   (iii) 4 से, यदि दहाई और इकाई के अंकों से बनने वाली संख्या 4 से विभाजित हो।
   (iv) 5 से, यदि इकाई का अंक 0 या 5 हो।
   (v) 9 से, यदि संख्या के अंकों का योग 9 से विभाजित हो।
   (vi) 10 से, यदि इकाई का अंक 0 हो।
   (vii) 11 से, यदि (इकाई अंक से प्रारंभ करके) इसके विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग और सम स्थानों पर स्थित अंकों के योग का अन्तर 0 हो या 11 से विभाजित हो।
   (viii) दो संख्याओं के म.स. और ल.स. का गुणनफल उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।

(ix) असहभाज्य संख्याओं का उभयनिष्ठ गुणनखंड 1 होता है। इसलिए दो अभाज्य या असहभाज्य संख्याओं का म.स. 1 होता है।

(x) दो अभाज्य या असहभाज्य संख्याओं का ल.स. उन संख्याओं का गुणनफल होता है।

अतीत के झरोखे से

प्राचीन काल में मनुष्य को गिनने का कोई ज्ञान नहीं था परन्तु उसे अपनी व्यक्तिगत सम्पत्ति जैसे पशु, पेड़-पौधों इत्यादि का विवरण रखना पड़ता था। इसके लिए उसे किसी लकड़ी पर लगाए गए कटावदार चिह्नों या किसी रस्सी पर बनाई गई गाँठों इत्यादि जैसे चिह्नों पर आश्रित रहना पड़ता था। एक प्रकार से वह अपनी वस्तुओं तथा इन चिह्नों में एक-एक संगतता (one-to -one correspondence) स्थापित किया करता था जिससे उसके पास उनकी गिनती का विवरण रहता था। कुछ समय के बाद इन विवरणों को पहले की अपेक्षा अच्छी प्रकार से रखने की आवश्यकता अनुभव की गई और इससे संख्याओं की खोज प्रारंभ हुई। इस प्रकार विभिन्न सभ्यताओं ने अपनी-अपनी ***संख्या पद्धतियों*** या *निकायों (systems)* का विकास किया जिन्हें ***संख्यांकन*** *(numeration)* कहते हैं।

मिस्र की संख्यांकन पद्धति को वहाँ की कब्रों और स्मारकों में की गई नक्काशी में देखा जा सकता है। यह लगभग 5000 वर्ष पुरानी है। इसमें एक ऐसी दशमलव पद्धति का प्रयोग किया गया है जिसमें 10 की विभिन्न घातों के लिए अलग-अलग संकेत प्रयोग किए जाते हैं। 10 को एड़ी की हड्डी जैसे संकेत ∩, 100 को एक घुमावदार संकेत (scroll)? से व्यक्त किया जाता है इत्यादि। रोमन पद्धति में, कई संख्याओं के लिए विशेष संकेतों का प्रयोग किया जाता हैं परंतु उनमें स्थानीय मान (place value) की धारणा का कोई प्रयोग नहीं होता। 1 के लिए I, 5 के लिए V, 10 के लिए X, 50 के लिए L, 100 के लिए C , 500 के लिए D, और 1000 के लिए M का प्रयोग किया जाता है। किसी बड़े संकेत के बाईं ओर लगा हुआ छोटा संकेत व्यवकलन प्रदर्शित करता है तथा उसके दाईं ओर लगा संकेत योग प्रदर्शित करता है। यह प्रणाली भी लोकप्रिय न हो सकी क्योंकि यह परिकलन करने में असुविधाजनक रही।

300 ईसा पूर्व (ई.पू.) तक भारतीय गणितज्ञों ने कुछ *संख्यांक (numerals)* खोज लिए थे जिन्हें **बृह्म संख्याएँ** कहते थे। परन्तु इनमें भी *स्थानीय मान (place value)* का प्रयोग नहीं किया गया तथा इनमें शून्य के लिए कोई संख्यांक नहीं

था। शून्य की संकल्पना के उद्गम का श्रेय भारतीयों को जाता है। शून्य का प्राचीनतम उपयोग ग्वालियर (भारत) में खुदाई से प्राप्त 876 ई. के शिलालेखों में मिलता है। इन शिलालेखों में 50 तथा 270 दोनों संख्याएँ शून्य का प्रयोग करते हुए लिखी गई हैं।

भारतीय गणितज्ञ *भास्कर (प्रथम)* ने ईसा के लगभग 500 वर्ष बाद (500 ई) स्थानीय मान वाली एक पद्धति का प्रयोग किया जिसमें शून्य के लिए भी एक संकेत था। इसमें इकाई का स्थान (units' place) बाईं ओर था जबकि आजकल यह दाईं ओर होता है। इसमें शीघ्र ही परिवर्तन किया गया और धीरे-धीरे यह वर्तमान ***हिंदू अरेबिक संख्यांकन पद्धति*** *(Hindu Arabic System of Numeration)* के रूप में विकसित हुई जो कि सर्वाधिक वैज्ञानिक तथा पढ़ने लिखने में सुविधाजनक है। यही पद्धति अन्तर्राष्ट्रीय रूप में मान्य है एवं प्रयोग में लाई जाती है। जैसा कि नाम से स्पष्ट है हिंदू अरेबिक संख्यांकन पद्धति भारत में विकसित की गई। अरबों ने इसे अपना लिया और इसके संख्यांकों में कुछ संशोधन किए। यूरोपवासियों ने संशोधित रूप में इन संख्यांकों को अरबों से प्राप्त किया। इस पद्धति में दस संकेतों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 और 9 का प्रयोग किया जाता है, जिन्हें *अंक (digits)* कहते हैं। इन दस संकेतों की सहायता से स्थानीय मान के सिद्धान्त का प्रयोग करते हुए, किसी भी संख्या को लिखा जा सकता है चाहे वह कितनी भी बड़ी क्यों न हो। इस पद्धति की दो महत्वपूर्ण विशेषताएँ हैं जो इसे अन्य सभी पद्धतियों से श्रेष्ठ बनाती हैं। सर्वप्रथम इस पद्धति में किसी राशि की अनुपस्थिति को व्यक्त करने के लिए शून्य के संकेत को सम्मिलित किया गया जिसके कारण स्थानीय मान के सिद्धांत का प्रयोग संभव हो सका। दूसरे इसमें चारों आधारभूत *संक्रिआएँ (operations)* के करने के लिए सरल नियम विकसित हो जाते हैं। क्योंकि इस पद्धति में दस संकेतों का प्रयोग होता है और किन्हीं भी बड़ी संख्याओं के संख्यांक लिखने में दस-दस के समूहों का प्रयोग किया जाता है, इसलिए यह *आधार – 10 वाली* या *दशमलव संख्यांकन पद्धति (decimal system of numeration)* कहलाती है।

ऋणात्मक संख्याओं का प्रयोग बहुत पहले से ही व्यवकल्यों (subtrahends) के रूप में चीन के निवासियों द्वारा किया जाता रहा है जैसा कि रचना ***किचांग सुआन शू*** *(K'iuch'ang Suan-shu)* (200 ई.पू.) से पता चलता है। परन्तु चिह्नों के नियम का उल्लेख 1299 ई के पूर्व कहीं नहीं मिलता है। भारत में, ऋणात्मक संख्याओं का उल्लेख सर्वप्रथम ***ब्रह्मगुप्त*** (628 ई) की रचनाओं में मिलता है। यहाँ वे

ऋणात्मक एवं धनात्मक संख्याओं का प्रयोग व्यवकल्यों के रूप में सामान्य चिह्नों के नियम देते हुए करते हैं। इसके बाद *महावीर* (850 ई.) ने इन संख्याओं तथा चिह्नों का उल्लेख किया है। इसके बाद इस विषय पर प्राप्त लगभग सभी भारतीय ग्रंथों में ऋणात्मक संख्याओं तथा ऋणात्मक चिह्न का उल्लेख मिलता है।

अनुपात, समानुपात और ऐकिक विधि

अध्याय 4

4.[illegible] [illegible]

इस अध्याय में हम आपको अनुपात और समानुपात के विषय में बताएँगे। हम आपको ऐकिक विधि का परिचय भी देंगे और दैनिक जीवन की समस्याएँ हल करने में इस विधि का प्रयोग भी दिखाएँगे।

[illegible]

दैनिक जीवन में हमें बहुधा राशियों की तुलना इनकी मात्रा या माप के अनुसार करनी पड़ती है। उदाहरण के लिए, माना कि अमित का भार 45 किग्रा और असलम का भार 52 किग्रा है। हम कह सकते हैं कि असलम का भार अमित के भार से (52–45) किग्रा, अर्थात् 7 किग्रा अधिक है। इसी प्रकार, यदि राम की लम्बाई 150 सेमी और रहीम की लम्बाई 145 सेमी हो, तो हम कह सकते हैं कि राम की लम्बाई रहीम की लम्बाई से (150–145) सेमी, अर्थात् 5 सेमी अधिक है। इस प्रकार हम देखते हैं कि दो राशियों की तुलना की एक विधि है इनके बीच *अन्तर* निकालना। राशियों की तुलना एक और विधि से भी की जाती है।

मान लीजिए कि गेहूँ की एक बोरी का भार 100 किग्रा तथा उर्वरक (खाद) की एक बोरी का भार 40 किग्रा है। एक तो हम कह सकते हैं कि गेहूँ की बोरी का भार खाद की बोरी के भार से (100–40) किग्रा, अर्थात् 60 किग्रा अधिक है। दूसरे हम यह भी कह सकते हैं कि गेहूँ की बोरी का भार, खाद की बोरी के भार का (100 ÷ 40), अर्थात् $\frac{100}{40}$ गुना है। इस प्रकार हमने तुलना की एक दूसरी विधि देखी जिसे *विभाजन द्वारा तुलना (comparision by division)* करना कहते हैं। यदि एक नगर की जनसंख्या 2000000 हो और इस नगर के एक मोहल्ले की जनसंख्या 25000 हो, तो हम कहेंगे कि नगर की जनसंख्या मोहल्ले की जनसंख्या

की $\frac{2000000}{25000}$, अर्थात् 80 गुना है।

जब हम एक ही प्रकार की दो राशियों की तुलना (मात्रा के अनुसार) विभाजन द्वारा करते हैं, तो हम कहते हैं कि हमने इन दो राशियों का *अनुपात* (*ratio*) बनाया है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि गेहूँ की बोरी के भार का खाद की बोरी के भार से अनुपात $100 \div 40$ या $\frac{100}{40}$ है। बहुधा अनुपात को व्यक्त करने के लिए संकेत (प्रतीक) ':' का प्रयोग किया जाता है। अतः ऊपर के अनुपात को 100 : 40 लिखेंगे (और 100 अनुपात 40 पढ़ेंगे)। इसी प्रकार, नगर की जनसंख्या का मोहल्ले की जनसंख्या से अनुपात 2000000 : 25000 है। पहले उदाहरण के अनुपात 100 : 40 में संख्या 100 को अनुपात का पहला *पद (term)* और 40 को अनुपात का **दूसरा** *पद* कहेंगे। इसी प्रकार, दूसरे उदाहरण के अनुपात 2000000 : 25000 में 2000000 अनुपात का पहला पद और 25000 अनुपात का दूसरा पद है।

यदि भाज्य तथा भाजक को एक ही शून्येतर (non-zero) संख्या से गुणा या भाग करें, तो भागफल बदलता नहीं है। अतः एक ही अनुपात को कई प्रकार से लिखा जा सकता है। उदाहरणतः 100 : 40 को 10 : 4 या 5 : 2 या 125 : 50 आदि लिखा जा सकता है। ध्यान दीजिए कि 5 : 2 के दोनों पदों में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड (common factor) नहीं है। अनुपात के ऐसे रूप को इसका ***सरलतम रूप (simplest form)*** कहते हैं। अनुपात जब अपने सरलतम रूप में हो तब हम यह भी कहते हैं कि अनुपात अपने *न्यूनतम पदों (lowest terms)* में है। प्रायः अनुपात को उसके सरलतम रूप अथवा न्यूनतम पदों में व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार गेहूँ की बोरी के भार का खाद की बोरी के भार से अनुपात को 5 : 2 लिखा जाएगा। नगर की जनसंख्या के मोहल्ले की जनसंख्या के अनुपात को 80 : 1 $(80 = \frac{80}{1})$ लिखा जाएगा। इसी प्रकार, यदि किसी ट्रैक्टर का मूल्य बैलों की किसी जोड़ी के मूल्य का 30 गुना हो, तो हम कहेंगे कि ट्रैक्टर के मूल्य का बैलों की जोड़ी के मूल्य से अनुपात 30 : 1 है।

जिन दो राशियों में तुलना की जा रही हो, वे यदि एक प्रकार की न हों, या (लम्बाई/आयतन/मुद्रा आदि के) उसी मात्रक में न हों, तो इनकी तुलना का कोई अर्थ नहीं। जैसे कि हम 12 *लड़कों* की तुलना 8 *गायों* से, अथवा 20 *ली* की तुलना 5 *खिलौनों* से, या 5 *मी* की तुलना 35 *सेमी* से नहीं करेंगे। अतः (उसी प्रकार की)

दो राशियों की तुलना करने के लिए इन्हें **एक ही मात्रक** में व्यक्त करना आवश्यक है।

टिप्पणी : 1. यह तो ठीक है कि हम 12 **लड़कों** और 8 **गायों** की तुलना नहीं करते, किन्तु हम **लड़कों की *संख्या*** (12) की तुलना **गायों की *संख्या*** (8) से कर सकते हैं । इसी प्रकार, हम **लीटरों की *संख्या*** (20) की तुलना **खिलौनों की *संख्या*** (5) से कर सकते हैं, आदि-आदि। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि **लड़कों की संख्या** का **गायों की संख्या** से अनुपात 12 : 8 है। इसी प्रकार, **लीटरों की संख्या** का खिलौनों की संख्या से अनुपात 20 : 5 है, आदि-आदि।

2. इस बात पर ध्यान दीजिए कि अनुपात में पदों का क्रम महत्वपूर्ण होता है। अनुपात 5 : 2, अनुपात 2 : 5 से भिन्न है।

आइए, अब उदाहरणों की सहायता से इन बातों को ठीक से समझा जाए।

उदाहरण 1: निम्नलिखित वाक्य को अनुपात में व्यक्त कीजिए:

चाय बनाने में तीन कप पानी के लिए एक कप दूध की आवश्यकता होती है।

हल : चाय में पानी की मात्रा 3 कप और दूध की मात्रा 1 कप है। अतः

पानी और दूध 3 : 1 के अनुपात में हैं।

या दूध और पानी 1 : 3 के अनुपात में हैं।

उदाहरण 2: निम्नलिखित अनुपात को दैनिक व्यवहार की भाषा में व्यक्त कीजिए:

पानी बनाने के लिए ऑक्सीजन और हाइड्रोजन के आयतनों 1 : 2 के अनुपात में मिलाया जाता है।

हल: पानी बनाने के लिए ऑक्सीजन के एक भाग आयतन को हाइड्रोजन के दो भाग आयतन में मिलाया जाता है।

उदाहरण 3: 25 का 40 से अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: स्पष्टतः इच्छित अनुपात 25 : 40 है। हाँ, अब यदि सम्भव हुआ तो हम इस अनुपात को सरलतम रूप या न्यूनतम पदों में व्यक्त करेंगे। इसके लिए यह देखेंगे कि 25 और 40 में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड है या नहीं। यदि हुआ तो अनुपात के दोनों पदों को इस उभयनिष्ठ गुणनखंड से भाग देंगे। क्योंकि 25 और 40 में 5 एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है, अतः अनुपात 25 : 40 बराबर है

$$\frac{25}{40} = \frac{25 \div 5}{40 \div 5} = \frac{5}{8} = 5:8 \text{ के ।}$$

अब क्योंकि 5 और 8 में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है, अतः अनुपात 5 : 8 दिए हुए अनुपात का सरलतम रूप है।

[illegible] 65 किमी का 91 किमी से अनुपात निकालिए।

[illegible] दी गई राशियाँ एक ही मात्रक (किमी) में हैं। अतः इच्छित अनुपात 65 : 91 है।

यहाँ 65 और 91 में एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 13 है। अतः वाँछित अनुपात है :

$$65:91 = \frac{65}{91} = \frac{65 \div 13}{91 \div 13} = \frac{5}{7} = 5:7$$

अब 5 और 7 में 1 के अतिरिक्त कोई और उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। अतः अनुपात का सरलतम रूप 5 : 7 है।

[illegible] 250 ग्राम का 10 किग्रा से अनुपात ज्ञात कीजिए।

[illegible] दी हुई राशियाँ अलग-अलग मात्रकों में हैं। अतः हम 10 किग्रा. को ग्रामों (ग्रा) में बदल लेते हैं। इस प्रकार

10 किग्रा = 10 × 1000 ग्रा = 10000 ग्रा

अतः वाँछित अनुपात हुआ $250 : 10000 = \frac{250}{10000}$

$= \frac{25}{1000}$ (उभयनिष्ठ गुणनखंड 10 से भाग देकर)

$= \frac{1}{40}$ (उभयनिष्ठ गुणनखंड 25 से भाग देकर)

$= 1:40$

उदाहरण 6: 90 सेमी का 1.5 मी से अनुपात निकालिए।

अब 1.5 मी $= 1.5 \times 100$ सेमी

$= 150$ सेमी

अत: वाँछित अनुपात हुआ $90 : 150$

$= 9 : 15$ (उभयनिष्ठ गुणनखंड 10 से भाग देकर)

$= 3 : 5$ (उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 से भाग देकर)

हम तब तक अनुपात को सरल करते चले जाते हैं जब तक इसके पदों में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड शेष न रहे। दूसरे शब्दों में, अनुपात को इसके न्यूनतम पदों में व्यक्त करने के लिए हमें इसके दोनों पदों को इनके महत्तम समापवर्तक से भाग देना पड़ता है। ऊपर के उदाहरण में (90 और 150 का) महत्तम समापवर्तक 30 है। अत: वाँछित अनुपात है:

$$\frac{90 \div 30}{150 \div 30} = \frac{65}{91} \text{ या } 3 : 5$$

किसी पाठशाला में बालकों और बालिकाओं की संख्याएँ क्रमश: 480 और 576 हैं। बालकों की संख्या का बालिकाओं की संख्या से अनुपात सरलतम रूप में ज्ञात कीजिए।

वाँछित अनुपात है $480 : 576 = \frac{480}{576}$

अब 480 और 576 का महत्तम समापवर्तक 96 है।

अत: वाँछित अनुपात का सरलतम रूप है:

$$\frac{480 \div 96}{576 \div 96} = \frac{5}{6} \text{ या } 5 : 6$$

भवनों को मापने वाले एक स्टील के फीते की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमश: 10 मी और 2.4 सेमी हैं। फीते की लम्बाई का इसकी चौड़ाई से क्या अनुपात है?

फीते की लम्बाई का चौड़ाई से अनुपात $= \frac{10 \times 100 \text{ सेमी}}{2.4 \text{ सेमी}}$ (1सेमी $= 100$ सेमी)

$$= \frac{1000}{2.4} = \frac{10000}{24} = \frac{1250}{3}$$ (महत्तम समापवर्तक 8 से भाग देकर)

इस प्रकार, वाँछित अनुपात 1250 : 3 है।

उदाहरण 9: एक कार्यालय प्रातः नौ बजे खुलकर सायं साढ़े पाँच बजे बन्द हो जाता है। बीच में 30 मिनट भोजन का अवकाश होता है। भोजनावकाश का कार्यालय खुले रहने के कुल समय से क्या अनुपात है?

हल: भोजनावकाश = 30 मिनट

क्योंकि साढ़े पाँच बजे सायं को हम 17 : 30 घंटे लिख सकते हैं, अतः

कार्यालय खुले रहने का कुल समय = (17 : 30 − 9 : 00) घंटे

= 8 घंटे 30 मिनट

= (8 × 60 + 30) मिनट

= 510 मिनट

अतः वाँछित अनुपात $= 30 : 510 = \frac{30}{510} = \frac{1}{17}$ या 1 : 17

टिप्पणी: ऊपर के उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाता है कि **अनुपात का अपना कोई मात्रक नहीं होता।**

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित वाक्यों को अनुपातों का प्रयोग करते हुए लिखिए:
   - (i) एक पाठशाला में चार कक्षाओं को पढ़ाने का कार्य छः अध्यापिकाओं को दिया गया है।
   - (ii) एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से दुगुनी है।
   - (iii) एक कक्षा में, बोर्ड की परीक्षाओं की योग्यता-सूची (merit list) में लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या की दुगुनी है।
   - (iv) गणित के एक टैस्ट (test) में पास होने वाले विद्यार्थियों की संख्या उस टैस्ट में बैठने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या की दो तिहाई है।

2. निम्नलिखित अनुपातों को दैनिक जीवन की भाषा में व्यक्त कीजिए:
   (i) भारत में गाँवों और नगरों की संख्याओं का अनुपात लगभग 2000 : 1 है।
   (ii) एक परीक्षा में पास होने वाले विद्यार्थियों की संख्या का परीक्षा में बैठने वाले कुल विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात 4 : 5 है।
   (iii) एक फैक्टरी में बनने वाली खराब पेंसिलों की संख्या का अच्छी पेंसिलों की संख्या से अनुपात 1 : 9 है।
   (iv) एक अम्ल (acid) को तनु (हल्का) करने के लिए विद्यार्थियों से कहा गया कि अम्ल और पानी को 2 : 5 के अनुपात में मिश्रित करें।

3. निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए:
   (i) 200 का 75 से (ii) 48 मीटर का 36 मीटर से
   (iii) 21 घंटों का 35 घंटों से (iv) 172 का 258 से

4. अनुपात ज्ञात कीजिए:
   (i) 25 सेमी का 10 मी से (ii) 200 मिली का 5 ली से
   (iii) 35 मिनट का 45 सेकंड से (iv) 90 पैसे का 3 रु से
   (v) 1 घंटे का 15 सेकंड से (vi) 8 किग्रा का 400 ग्रा से
   (vii) एक दर्जन का एक कोरी (score) से
   (viii) 38.00 रु का 9.50 रु से
   (ix) 300 मी का 5 किमी से (x) 2 घंटे का 30 मिनट से

5. एक वर्ष में सोनिया ने 160000 रु कमाए और 12000 रु आयकर के रूप में दिए। अनुपात ज्ञात कीजिए :
   (i) सोनिया की आय का आयकर से
   (ii) आयकर का सोनिया की आय से

6. सुब्रमण्यम एक प्रवक्ता है और उसकी मासिक आय 14000 रु है। उसकी पत्नी डेजी डॉक्टर के रूप में कार्यरत है और वह प्रति माह 18000 रु कमाती है। अनुपात ज्ञात कीजिए;

(i) सुब्रमण्यम की आय का दोनों की कुल आय से

(ii) डेंजी की आय का दोनों की कुल आय से

7. मारग्रेट एक कारखाने में कार्य करती है तथा उसकी मासिक आय 9550 रु है। वह प्रति माह अपनी आय में से 1850 रु बचाती है। अनुपात ज्ञात कीजिए:

(i) उसकी बचत का उसकी आय से

(ii) उसकी आय का उसके व्यय से

(iii) उसकी बचत का उसके व्यय से

8. एक बहुराष्ट्रीय कम्पनी में 144 व्यक्ति काम करते हैं। इनमें से 56 पुरुष और शेष महिलाएँ हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए:

(i) पुरुषों की संख्या का महिलाओं की संख्या से

(ii) पुरुषों की संख्या का कुल कार्यरत व्यक्तियों की संख्या से

(iii) महिलाओं की संख्या का कुल कार्यरत व्यक्तियों की संख्या से

9. कागज के एक आयताकार पन्ने की लम्बाई 1.2 मी और उसकी चौड़ाई 42 सेमी है। कागज की चौड़ाई का इसकी लम्बाई से अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. एक पाठशाला में कुल मिलाकर 1800 विद्यार्थी पढ़ते हैं। इनमें से 850 लड़के और शेष लड़कियाँ हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए:

(i) लड़कों की संख्या का विद्यार्थियों की कुल संख्या से

(ii) लड़कियों की संख्या का विद्यार्थियों की कुल संख्या से

(iii) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से

11. एक बैलगाड़ी 3 घंटे में 24 किमी चलती है और एक रेलगाड़ी 2 घंटे में 120 किमी. चलती है। इनकी चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

$$\left[\text{संकेत : चाल} = \frac{\text{तय की गई दूरी}}{\text{लगने वाला समय}} \right]$$

12. दिल्ली से मुम्बई और दिल्ली से कोलकाता की उड़ानों में क्रमशः $1\frac{3}{4}$ और 2 घंटे लगते हैं। यदि दिल्ली से मुम्बई की हवाई-दूरी 1225 किमी और दिल्ली से कोलकाता की हवाई-दूरी 1300 किमी हो, तो दोनों उड़ानों की चालों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

13. भारत में दो भिन्न वर्षों में जिन गाँवों में बिजली पहुँचाई गई उनकी संख्या 3000 और 350000 है। इन दो वर्षों में जिन गाँवों का विद्युतीकरण हुआ उनकी संख्याओं में अनुपात ज्ञात कीजिए :

14. एक पाठशाला के कुल 2850 विद्यार्थियों में से 1650 पिकनिक पर गए। पिकनिक पर जाने वाले विद्यार्थियों की संख्या का अनुपात ज्ञात कीजिए

(i) पाठशाला के विद्यार्थियों की कुल संख्या से

(ii) उन विद्यार्थियों की संख्या से जो पिकनिक पर नहीं गए

15. 100 सदस्यों वाले एक क्लब में, 20 सदस्य कैरम खेलते हैं, 24 टेबल-टैनिस तथा 16 सदस्य बैडमिंटन खेलते हैं। शेष सदस्य कुछ नहीं खेलते। कोई सदस्य एक से अधिक खेल नहीं खेलता। अनुपात ज्ञात कीजिए:

(i) कैरम खेलने वाले सदस्यों की संख्या का टेबल-टैनिस खेलने वाले सदस्यों की संख्या से

(ii) बैडमिंटन खेलने वालों की संख्या का कैरम खेलने वालों की संख्या से

(iii) टेबल-टैनिस खेलने वालों की संख्या का बैडमिंटन खेलने वालों की संख्या से

(iv) बैडमिंटन खेलने वालों की संख्या का कुछ भी न खेलने वालों की संख्या से

(v) कुछ-न-कुछ खेलने वालों की संख्या का कुछ भी न खेलने वालों की संख्या से.

4.3 समानुपात

मान लीजिए कि किसी कपड़े का मूल्य 160 रु प्रति मीटर है। यदि हम ऐसा 5 मीटर कपड़ा खरीदते हैं, तो हमें 800 रु देने होंगे। किन्तु यदि हम 8 मीटर कपड़ा खरीदें, तो हमें 1280 रु देने होंगे। अब कपड़े की इन दो मात्राओं में अनुपात 5 मी : 8 मी अर्थात् 5 : 8 है। साथ ही, इनके मूल्यों में अनुपात 800 रु : 1280 रु अर्थात् 800 : 1280 है। सरलतम रूप में, मूल्यों का अनुपात 5 : 8 है। इस प्रकार, हम देखते हैं कि

कपड़े की मात्राओं में अनुपात = 5 : 8 = मूल्यों में अनुपात, अर्थात् 5 : 8 = 800 : 1280 है।

एक और उदाहरण लेते हैं। यदि दूध 16 रु प्रति लीटर हो, तो 20 लीटर दूध का मूल्य 320 रु और 35 लीटर दूध का मूल्य 560 रु होगा। अब दूध की इन दो मात्राओं में अनुपात है:

20 ली : 35 ली या 20 : 35 या 4 : 7 (सरलतम रूप में)

और दूध के मूल्यों में अनुपात : 320 रु : 560 रु या 320 : 560 या 4 : 7 (सरलतम रूप में) है।

इस प्रकार यहाँ भी

20 : 35 = 320 : 560 (मात्राओं में अनुपात = मूल्यों में अनुपात)

ऊपर के दोनों उदाहरणों में हमने देखा कि पहली दो संख्याओं में जो अनुपात था वही तीसरी और चौथी में भी था।

दो अनुपातों की ऐसी समता (equalility) को समानुपात (proportion) कहते हैं।

हम यह भी कहते हैं कि ये **चार संख्याएँ *समानुपात में हैं*** या ***समानुपातिक*** हैं। इस प्रकार, पहले उदाहरण में संख्याएँ 5, 8, 800 और 1280 समानुपात में थीं। दूसरे उदाहरण में 20, 35, 320 और 560 समानुपात में थीं।

अब एक तीसरा उदाहरण लेते हैं। 40 किमी प्रति घंटे की चाल से चलती हुई एक रेलगाड़ी 200 किमी की दूरी 5 घंटे में तय करेगी, जबकि 50 किमी प्रति घंटे की चाल से चलती हुई एक दूसरी रेलगाड़ी इसी दूरी को 4 घंटे में तय करेगी। हम देखते हैं कि चालों में अनुपात 40 : 50 है, अर्थात् 4 : 5 है, जबकि उसी दूरी को तय करने में लगने वाले समय का अनुपात 5 : 4 है। स्पष्ट है कि 4 : 5 ≠ 5 : 4 अर्थात् अनुपात *40 : 50* और 5 : 4 बराबर नहीं हैं। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि संख्याएँ 40, 50, 5 और 4 समानुपात में *नहीं* हैं।

इस प्रकार, **चार संख्याएँ तब समानुपात में कहलाती हैं जब पहली संख्या का दूसरी से अनुपात वही हो जो तीसरी संख्या का चौथी से है।** दो अनुपातों में समता के लिए प्रायः संकेत ': :' का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार, पहले दो उदाहरणों में हम लिख सकते हैं :

5 : 8 : : 800 : 1280

20 : 35 : : 320 : 560

किन्तु तीसरे उदाहरण के लिए हम 40 : 50 : : 5 : 4 *नहीं लिख सकते।*

इस बात पर ध्यान दीजिए कि ऊपर के उदाहरणों में आने वाली संख्याएँ क्रमानुसार *पद* भी कहलाती हैं। पहले और चौथे पद को ***सिरों के पद*** तथा दूसरे और तीसरे पदों को ***मध्य के पद*** कहते हैं। 5 : 8 : : 800 : 1280 के सन्दर्भ में हम देखते हैं कि

$$5 \times 1280 = 8 \times 800$$

अर्थात् सिरों के पदों का गुणनफल = मध्य के पदों का गुणनफल।

साथ ही, 20 : 35 : : 320 : 560 के लिए भी

$$20 \times 560 = 35 \times 320$$

अर्थात् सिरों के पदों का गुणनफल = मध्य के पदों का गुणनफल, जबकि 40 : 50 ≠ 5 : 4 के लिए हम देखते हैं कि

$$40 \times 4 \neq 50 \times 5$$

अर्थात् सिरों के पदों का गुणनफल ≠ मध्य के पदों का गुणनफल।

हमने देखा कि यदि चार संख्याएँ समानुपात में हों, तो उनके सिरों के पदों का गुणनफल उनके मध्य के पदों के गुणनफल के बराबर होता है, जबकि यदि चार संख्याएँ समानुपात में न हों, तो उनके सिरों के पदों का गुणनफल उनके मध्य के पदों के गुणनफल के बराबर नहीं होता। यह एक महत्वपूर्ण गुण है और हमें यह निश्चित करने में सहायक होता है कि दी हुई चार संख्याएँ समानुपात में हैं या नहीं। अब ऊपर बताए गए तथ्यों को उदाहरणों द्वारा समझाया जाएगा।

उदाहरण 10: क्या 40, 30, 60, 45 समानुपात में हैं?

हल सिरों के पदों का गुणनफल = 40 × 45 = 1800

मध्य के पदों का गुणनफल = 30 × 60 = 1800

क्योंकि सिरों के पदों का गुणनफल = मध्य के पदों का गुणनफल है, अतः 40, 30, 60, 45 समानुपात में हैं।

उदाहरण 11: निश्चित कीजिए कि निम्नलिखित अनुपात समानुपात देते हैं या नहीं:

(i) 25 ग्रा : 200 ग्रा और 6 किग्रा : 48 किग्रा

(ii) 500 मिली : 200 मिली और 150 रु : 60 रु

(iii) 440 मी : 2 किमी और 55 सेमी : 3 मी

हल (i) 25 ग्रा : 200 ग्रा $= \frac{25}{200} = \frac{1}{8} = 1:8$

और 6 किग्रा : 48 किग्रा $\frac{6}{48} = \frac{1}{8} = 1:8$

अत: अनुपातों 25 ग्रा : 200 ग्रा और 6 किग्रा : 48 किग्रा से एक समानुपात प्राप्त होता है।

(ii) 500 मिली : 200 मिली $\frac{500}{200} = \frac{5}{2} = 5:2$

और 150 रु : 60 रु $\frac{150}{60} = \frac{5}{2} = 5:2$

अत: अनुपातों 500 मिली : 200 मिली और 150 रु : 60 रु से एक समानुपात प्राप्त होता है।

(iii) 440 मी : 2 किमी = 440 मी : 2 × 1000 मी

$$= \frac{440}{2000} = \frac{11}{50} = 11:50$$

और 55 सेमी : 3 मी = 55 सेमी : 3 × 100 सेमी

$$= \frac{55}{300} = \frac{11}{60} = 11:60$$

क्योंकि 11 : 50 $\neq$ 11 : 60 है, अत: अनुपात 440 मी : 2 किमी और 55 सेमी : 3 मी समानुपात नहीं बनाते।

उदाहरण 12: खाने (box) में एक उपर्युक्त संख्या लिखिए जिससे कि निम्नलिखित चारों संख्याएँ समानुपात में हो जाएँ:

12, 21, 8, ☐

हल : हम जानते हैं कि

मध्य पदों का गुणनफल $= 21 \times 8 = 168$

अब समानुपात के लिए, सिरों के पदों का गुणनफल भी 168 होना चाहिए। अत: हमें खाने में भरने के लिए ऐसी संख्या चाहिए जिसका 12 से गुणनफल 168 हो।

इस गुणन तथ्य के संगत भाग तथ्य का प्रयोग करने पर वाँछित संख्या $\frac{168}{12} = 14$ प्राप्त होती है। अतः खाने के लिए उपयुक्त संख्या 14 है।

निम्नलिखित संख्याओं में खाने को इस प्रकार भरिए कि एक समानुपात बने:

12, [ ], 14, 21

सिरों के पदों का गुणनफल $= 12 \times 21 = 252$

अतः समानुपात के लिए मध्य पदों का गुणनफल भी 252 होना चाहिए। अतः हमें ऐसी संख्या निकालनी है जिसे 14 से गुणा करने पर 252 प्राप्त हो। इस गुणन तथ्य के संगत भाग तथ्य का प्रयोग करने पर, हमें संख्या $\frac{252}{14} = 18$ प्राप्त होती है। अतः खाने के लिए उपयुक्त संख्या 18 है।

ऊपर के दो उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाता है कि *यदि किसी समानुपात के चार पदों में से तीन पद दिए हुए हों, तो सिरों के पदों (अथवा मध्य पदों) के गुणनफल को शेष पद से भाग देकर हम चौथा पद ज्ञात कर सकते हैं।*

उस समानुपात का तीसरा पद ज्ञात कीजिए जिसका पहला, दूसरा और चौथा पद क्रमशः 24, 8 और 5 है।

सिरों के पदों का गुणनफल $= 24 \times 5$

शेष पद $= 8$

अतः वाँछित तीसरा पद $= \frac{24 \times 5}{8} = 15$

इस प्रकार समानुपात का तीसरा पद 15 हुआ।

क्या संख्याएँ 24, 45, 18, 30 समानुपात में हैं?

सिरों के पदों का गुणनफल $= 24 \times 30 = 720$

मध्य पदों का गुणनफल $= 45 \times 18 = 810$

स्पष्ट है कि $720 \neq 810$

अत: दी हुई संख्याएँ समानुपात में नहीं हैं।

उदाहरण 16: खाने को इस प्रकार भरिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हो जाएँ:

(i) 60 किमी : 250 किमी = ☐ : 50 घंटे

(ii) 45 लड़कियाँ : 60 लड़कियाँ = 48 लड़के : ☐

हल : (i) 60 किमी : 250 किमी $= \frac{60}{250} = \frac{6}{25} = 6:25$

स्पष्टत: खाने की राशि घंटों में होगी और घंटों की संख्या उस समानुपात का तीसरा पद होगी जिसका पहला, दूसरा और चौथा पद क्रमश: 6, 25, और 50 है।

इस प्रकार खाने की राशि $\frac{6 \times 50}{25}$ घंटे $= 12$ घंटे

(ii) 45 लड़कियाँ: 60 लड़कियाँ $= \frac{45}{60} = \frac{3}{4} = 3:4$

स्पष्टत: खाने की राशि **कुछ लड़के** हैं और इन लड़कों की संख्या उस समानुपात का चौथा पद है जिसके पहले तीन पद क्रमश: 3, 4 और 48 हैं।

इस प्रकार खाने में वाँछित राशि $= \frac{4 \times 48}{3}$ लड़के अर्थात् 64 लड़के।

उदाहरण 17: क्या संख्याएँ 3, 9, 9, 27 समानुपात में हैं?

हल: सिरों के पदों का गुणनफल $= 3 \times 27 = 81$

मध्य पदों का गुणनफल $= 9 \times 9 = 81$

क्योंकि 81 = 81 है, अत: संख्याएँ 3, 9, 9, 27 समानुपात में हैं।

टिप्पणियाँ : 1. इस समानुपात में 9 दूसरे और तीसरे पद में, अर्थात् दो बार आ रहा है। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि 3, 9, 27 **वितत समानुपात** *(continued proportion)* में या केवल **समानुपात में हैं।**

2. कभी-कभी ऊपर की स्थिति में हम यह भी कह सकते हैं कि तीनों **संख्याएँ** $3:9:27$ **के अनुपात में हैं।**

उदाहरण 18: क्या संख्याएँ 16, 8, 4 समानुपात में हैं?

हल: 16, 8, 4 के समानुपात में होने के लिए आवश्यक होगा कि 16 : 8 = 8 : 4 हो।

अब $16 \times 4 = 64$, $8 \times 8 = 64$

अतः 16, 8, 4 समानुपात में हैं।

प्रश्नावली 4.2

1. ज्ञात कीजिए कि क्या निम्नलिखित समानुपात में हैं:
   (i) 2, 3, 4, 5 (ii) 4, 6, 8, 10 (iii) 4, 6, 8, 12
   (iv) 20, 45, 70, 95 (v) 15, 45, 75, 125 (vi) 33, 44, 75, 150

2. निश्चित कीजिए कि निम्नलिखित अनुपातों से समानुपात बनता है या नहीं:
   (i) 20 सेमी : 1 मी और 3.5 ली : 17.5 ली
   (ii) 2 किग्रा : 80 किग्रा और 25 ग्रा : 625 ग्रा
   (iii) 200 मिली : 2.5 ली और 4 रु : 50 रु
   (iv) 650 मी : 1 किमी और 65 सेमी : 1 मी

3. निम्नलिखित में से सत्य कथनों के लिए 'T' तथा असत्य कथनों के लिए 'F' लिखिए:
   (i) 16 : 24 = 20 : 30 (ii) 21 : 6 = 35 : 10
   (iii) 12 : 18 = 28 : 12 (iv) 8 : 9 = 24 : 27
   (v) 0.9 : 0.36 = 5 : 2 (vi) 5.2 : 3.9 = 3 : 4
   (vii) 8 : 27 = 9 : 24 (viii) 40 व्यक्ति : 200 व्यक्ति = 15 रु : 75 रु
   (ix) 3 किग्रा : 7 किग्रा = 14 रु : 6 रु
   (x) 99 किग्रा : 45 किग्रा = 44 रु : 20 रु
   (xi) 7.5 ली : 5 किग्रा = 15 ली : 10 किग्रा

4. खाने को इस प्रकार भरिए कि चारों संख्याएँ (राशियाँ) समानुपात में हों:
   (i) 20, 18, 40 □ (ii) 28, □ 3.5, 1.5
   (iii) 80, 64, □ 24 (iv) □ 35, 3, 15,

(v) 15, 45, [ ] 135

5. एक समानुपात के पहले तीन पद क्रमशः 7, 14 और 25 हैं। उसका चौथा पद ज्ञात कीजिए।

6. एक समानुपात का पहला, दूसरा और चौथा पद क्रमशः 18, 27 और 3 है। उसका तीसरा पद ज्ञात कीजिए।

7. खाने को इस प्रकार भरिए कि प्रत्येक कथन सत्य हो जाए:

(i) 32 मी : [ ] = 6 : 12 (ii) 22 किग्रा : 26 किग्रा = [ ] : 260 मी

(iii) 45 किमी : 60 किमी = [ ] : 16 घंटे

(iv) 2 : 17 = [ ] : 34 लड़कियाँ

(v) 30 लड़के : 45 लड़के = 16 लड़कियाँ : [ ]

8. निश्चित कीजिए कि 25, 10, 4 समानुपात में हैं या नहीं।

9. खाने को इस प्रकार भरिए कि तीनों संख्याएँ समानुपात में हों:

(i) 25, 35, [ ] (ii) [ ], 32, 64

(iii) 6, 18, [ ] (iv) [ ], 12, 48

4.4 ऐकिक विधि

एक समस्या हल करते हैं। मान लीजिए कि 24 किग्रा गेहूँ का मूल्य 288 रु है। तब, 15 किग्रा गेहूँ का मूल्य कैसे ज्ञात करेंगे? इस प्रश्न का उत्तर इस प्रकार दिया जा सकता है:

गेहूँ की उक्त दो मात्राओं का अनुपात 24 : 15 है। अतः इनके मूल्यों में भी यही अनुपात होगा। अतः 15 किग्रा गेहूँ का मूल्य निकालने के लिए हमें निम्नलिखित समता में रिक्त स्थान को भरना होगा:

24 : 15 = 288 रु : [ ] रु

स्पष्टतया, वाँछित मूल्य है : $\frac{288 \times 15}{24}$ रु = 180 रु।

हम ऊपर की गई क्रिया को दो भागों में बाँट सकते हैं, जहाँ हम एक अकेले अनुपात 24 : 15 के स्थान पर दो सरल अनुपातों 24 : 1 और 1 : 15 से काम चला सकें। तात्पर्य यह है कि पहले 24 किग्रा गेहूँ के मूल्य से 1 किग्रा गेहूँ का मूल्य

ज्ञात करेंगे और फिर 1 किग्रा गेहूँ के मूल्य से 15 किग्रा गेहूँ का मूल्य निकाल लेंगे।

इस कार्य को हम इस प्रकार कर सकते हैं:

24 किग्रा गेहूँ का मूल्य = 288 रु

∴ 1 किग्रा गेहूँ का मूल्य $= \frac{1 \times 288}{24}$ रु [$24 : 1 = 288 : \square$

या $\square = \frac{1 \times 288}{24}$]

= 12 रु

∴ 15 किग्रा गेहूँ का मूल्य = 12 × 15 रु = 180 रु

ध्यान दीजिए कि इस विधि में हमने पहले 1 किग्रा गेहूँ का मूल्य निकाला। इसके बाद गेहूँ की वाँछित मात्रा (15 किग्रा) का मूल्य निकाला। दूसरे शब्दों में कहें तो हमने दी हुई राशि के मूल्य से पहले **एक *एकक*** (*unit*) राशि का मूल्य निकाला और इससे वाँछित राशि का मूल्य ज्ञात किया। अत: इस विधि को *ऐकिक विधि* (*unitary method*) या ***(ऐकिक नियम)*** कहा जाता है।

अब कुछ उदाहरणों द्वारा इस विधि को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 19: एक मोटर कार 15 लीटर पैट्रोल में 240 किमी चलती है। 20 लीटर पेट्रोल में वह कितनी दूरी चलेगी?

हल: 15 ली पैट्रोल में मोटर कार चली है 240 किमी

∴ 1 ली पैट्रोल में यह चलेगी $\frac{240}{15}$ किमी = 16 किमी

∴ 20 ली पैट्रोल में यह चलेगी 16 × 20 किमी = 320 किमी

इस प्रकार वह मोटर कार 20 लीटर पैट्रोल में 320 किमी चलेगी।

उदाहरण 20: यदि 3 कापियों का मूल्य 25.50 रु हो, तो ऐसी 7 कापियों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: तीन कापियों का मूल्य = 25.50 रु

∴ 1 कापी का मूल्य $= \frac{25.50}{3}$ रु = 8.50 रु

$\therefore$ 7 कापियों का मूल्य $= 8.50 \times 7$ रु $= 59.50$ रु

अत: 7 कापियों का मूल्य 59.50 रु होगा।

उदाहरण 21: 20 टन लोहे का मूल्य 120000 रु है। 280 किग्रा लोहे का मूल्य निकालिए।

हल: क्योंकि 1 टन = 1000 किग्रा है,

20 टन = 20000 किग्रा

अब 20000 किग्रा लोहे का मूल्य = 120000 रु

$\therefore$ 1 किग्रा लोहे का मूल्य $= \frac{120000}{20000}$ रु

$= 6$ रु

$\therefore$ 280 किग्रा लोहे का मूल्य $= 6 \times 280$ रु

$= 1680$ रु

उदाहरण 22: सुब्बालक्ष्मी 15 माह में 144000 रु कमाती है।

(i) 7 माह में उसकी आय क्या होगी?

(ii) वह 240000 रु कितने माह में कमाएगी?

हल: हम देखते हैं कि आय कार्य करने के समय से जुड़ी है। कार्य करने की अवधि जितनी अधिक होगी आय भी उतनी ही अधिक होगी जबकि कार्य करने की अवधि कम होने पर आय भी उसी तरह कम होगी। यह भी कि आयों का अनुपात वही रहेगा।

(i) इस दशा में आय ज्ञात नहीं है परन्तु कार्य करने का समय ज्ञात है। अत: समय से आरम्भ कर समस्या इस भाँति हल करेंगे:

15 माह की आय = 144000 रु

$\therefore$ 1 माह की आय $= \frac{144000}{15}$ रु $= 9600$ रु

$\therefore$ 7 माह की आय $= 9600 \times 7$ रु $= 67200$ रु

(ii) यहाँ महीनों की संख्या ज्ञात नहीं है किन्तु आय 240000 रु ज्ञात है। अत: हम

आय से आरम्भ कर समस्या को निम्नलिखित प्रकार से हल करेंगे:

144000 रु आय है 15 माह की

$\therefore$ 1 रु आय होगी $\frac{15}{144000}$ माह की

$\therefore$ 240000 रु आय होगी $\frac{15}{144000} \times 240000$ माह की $= 25$ माह की

●●●

प्रश्नावली 4.3

1. 30 मीटर कपड़े का मूल्य 2550 रु है। 16 मीटर कपड़े का मूल्य ज्ञात कीजिए।
2. एक मजदूर को 5 दिन काम करने पर 560 रु दिए जाते हैं। 28 दिन काम करने पर उसे क्या दिया जाएगा?
3. 400 विद्यार्थियों वाले एक छात्रावास में प्रतिमाह 5200 किग्रा अनाज की खपत है। यदि विद्यार्थियों की संख्या 260 रह जाए, तो अनाज की मासिक खपत ज्ञात कीजिए।
4. यदि तेल के छः टैंकरों को भरने में एक पाइप $4\frac{1}{2}$ घंटे लगाता है, तो ऐसे 4 टैंकरों को वह पाइप कितने समय में भरेगा?
5. 15 पोस्टकार्डों का मूल्य 7.50 रु है। 36 पोस्टकार्डों का मूल्य ज्ञात कीजिए।
6. एक रेलगाड़ी एक नियत चाल से चलकर 85 किमी की दूरी $1\frac{1}{2}$ घंटे में तय करती है। इसी चाल से 340 किमी चलने में इस रेलगाड़ी को कितना समय लगेगा?
7. एक मशीन 24 पुर्जे 6 घंटे में बनाती है। यह मशीन 24 घंटे में कितने पुर्जे बनाएगी?
8. 5 किग्रा चावल का मूल्य 130 रु है। 24 किग्रा चावल का मूल्य ज्ञात कीजिए।
9. 15 लिफाफों का मूल्य 60 रु है। 32 रु में कितने लिफाफे आएँगे?
10. एक वायुयान 5 घंटे में 4000 किमी उड़ता है। 3 घंटे में वह कितनी दूर उड़ेगा?

11. 594 किमी चलने के लिए एक ट्रक को 108 ली डीजल की आवश्यकता पड़ती है। 1650 किमी चलने के लिए इस ट्रक को कितने डीजल की आवश्यकता होगी।

12. 1.5 किलोवाट (kw) क्षमता वाली एक पम्पिंग मशीन एक निश्चित अवधि में एक नियत गहराई वाले कुएँ से 1500 लीटर पानी निकाल देती है। इसी अवधि में इतने ही गहरे कुएँ से 4500 लीटर पानी निकालने के लिए कितने किलोवाट की क्षमता वाली मशीन की आवश्यकता पड़ेगी?

13. यदि 6 हेक्टेयर भूमि से 280 क्विंटल गेहूँ की उपज होती है, तो 225 क्विंटल गेहूँ की उपज के लिए कितने हेक्टेयर भूमि की आवश्यकता होगी? [**टिप्पणी:** 'हेक्टेयर' क्षेत्रफल का एक ऐसा मात्रक है जो बड़ी भूमि को मापने के लिए किया जाता है। साथ ही, 1 हेक्टेयर = 10000 मी^{2}]

14. 4 सदस्यों वाले एक परिवार में चीनी की मासिक खपत 6 किग्रा है। यदि इस परिवार में सदस्यों की संख्या 6 हो जाए, तो चीनी की मासिक खपत ज्ञात कीजिए।

15. एक कमरे का 4 महीने का किराया 4800 रु है। इस कमरे का एक वर्ष का किराया ज्ञात कीजिए।

16. 45 फोल्डिंग (बंद हो सकने वाली) कुर्सियों का भार 18 किग्रा है। 4000 किग्रा तक भार ले जा सकने वाले किसी ट्रक में ऐसी कितनी कुर्सियाँ लादी (ले जाई) जा सकती हैं?

17. 17 कुर्सियों का मूल्य 19210 रु है। 113000 रु में ऐसी कितनी कुर्सियाँ खरीदी जा सकती हैं?

18. दो दर्जन संतरों का मूल्य 60 रु है। ऐसे ही 120 संतरों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

19. एक मोटर कार 3 घंटे में 165 किमी चलती है।
   (i) 440 किमी चलने में यह कितना समय लगाएगी?
   (ii) 7 घंटे में यह कितनी दूर चलेगी?

20. 72 पुस्तकों का भार 9 किग्रा है।
   (i) ऐसी 80 पुस्तकों का भार क्या होगा?
   (ii) ऐसी कितनी पुस्तकों का भार 6 किग्रा होगा?

याद रखने योग्य बातें

1. जब हम एक ही प्रकार की दो राशियों की तुलना (मात्रा के अनुसार) विभाजन द्वारा करते हैं, तो हम कहते हैं कि हमने इन दो राशियों में एक *अनुपात* बनाया है।
2. दो संख्याओं (राशियों) का अनुपात प्रायः उनके सरलतम रूप में व्यक्त किया जाता है।
3. अनुपात का अपना कोई मात्रक नहीं होता।
4. दो अनुपातों में समता *समानुपात* कहलाती है।
   यदि $a : b = c : d$, तो a, b, c, d एक समानुपात बनाते हैं और क्रमशः इस अनुपात का पहला, दूसरा, तीसरा, चौथा पद कहलाते हैं।
5. समानुपात के पहले तथा चौथे पदों को *सिरों के पद* कहते हैं। दूसरे तथा तीसरे पदों को *मध्य पद* कहा जाता है।
6. चार संख्याएँ तब समानुपात में होती हैं जब सिरों के पदों का गुणनफल = मध्य के पदों का गुणनफल हो।
7. यदि a, b और c ऐसी संख्याएँ हों कि
   $$a : b = b : c,$$
   तो हम कहते हैं कि a, b, c *वितत समानुपात* या केवल *समानुपात में* हैं।
8. दी गई राशियों से पहले एक (एकक) राशि का मान ज्ञात कर, फिर वाँछित राशियों का मान ज्ञात करने की विधि को *ऐकिक विधि* कहा जाता है।

प्रतिशतता एवं उसके अनुप्रयोग

अध्याय 5

5.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में आपने सीखा कि 'प्रतिशत' से क्या तात्पर्य है। इस अध्याय में हम इस विषय को अधिक विस्तार से सीखेंगे। प्रतिशतता का उपयोग लाभ-हानि और साधारण ब्याज से संबंधित समस्याओं के हल में भी किया जाएगा।

5.2 प्रतिशतता

पिछली कक्षाओं में आपने दो भिन्नों की तुलना करना सीखा था। याद कीजिए कि दो भिन्नों की तुलना करने के लिए हम इन्हें ऐसे रूप में बदल लेते थे कि इनका हर वही हो जाए। तब हम इनके अंशों की तुलना करते थे। बड़े अंश वाली भिन्न बड़ी कहलाती थी। आगे के उदाहरणों से यह बात स्पष्ट हो जाएगी कि भिन्नों की तुलना के कुछ व्यावहारिक लाभ हैं।

मान लीजिए कि एक विद्यालय A में 320 विद्यार्थी थे जिनमें से 256 पास हुए और एक दूसरे विद्यालय B में 400 विद्यार्थी थे जिनमें से 300 पास हुए। क्या हम यह कह सकते हैं कि विद्यालय B का परिणाम विद्यालय A की तुलना में अधिक अच्छा रहा क्योंकि 300 > 256 से ? नहीं। हमें दोनों विद्यालयों के कुल विद्यार्थियों की संख्या को भी ध्यान में रखना होगा। दोनों विद्यालयों के परिणामों की तुलना करने के लिए हमें 256 और 300 की तुलना करने के स्थान $\frac{256}{320}$ पर और $\frac{300}{400}$ की तुलना करनी होगी। इसके लिए हमें $\frac{256}{320}$ और $\frac{300}{400}$ को समान हर वाली भिन्नों में बदलना होगा। इन दो भिन्नों को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{256}{320} = \frac{4}{5} = \frac{4\times 20}{5\times 20} = \frac{80}{100}$$

$$\frac{300}{400} = \frac{3}{4} = \frac{3\times 25}{4\times 25} = \frac{75}{100}$$

अब हम आसानी से देख सकते हैं कि $\frac{80}{100} > \frac{75}{100}$ से। अतः विद्यालय A का परिणाम विद्यालय B के परिणाम की तुलना में अधिक अच्छा रहा। ध्यान दीजिए कि हमने दोनों को समान हर 100 वाली भिन्नों में बदला। याद कीजिए कि पिछली कक्षाओं में **हमने हर 100 वाली भिन्नों को *प्रतिशत* *(per cent)*** कहा है। आपको यह भी याद होगा कि *per cent* लातीनी *(Latin)* भाषा के वाक्यांश *per centum* (जिसका अर्थ होता है **प्रति सौ, सैकड़ा या शतांश**) का लघु रूप है और इसे प्रतीक '%' से व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार ऊपर के उदाहरण में विद्यालय A के 80% विद्यार्थी और विद्यालय B के 75% विद्यार्थी पास हुए। अब स्पष्ट हो जाता है कि जहाँ तक परीक्षाओं का प्रश्न है, विद्यालय A का प्रदर्शन विद्यालय B की तुलना में अधिक अच्छा रहा है।

चूँकि प्रतिशत भिन्न का ही एक रूप है, अतः प्रतिशत को हम भिन्न के रूप में (या दशमलव के रूप में), और विलोमतः भी, व्यक्त कर सकते हैं इस बात को कुछ उदाहरणों द्वारा समझाया जाएगा।

उदाहरण 1: निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत के रूप में बदलिए:

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{11}{5}$ (iv) $\frac{2}{3}$

हल: याद कीजिए कि किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए हम उसे हर 100 वाली एक तुल्य भिन्न के रूप में व्यक्त करते हैं। इसलिए वाँछित कार्य निम्न प्रकार किया जाएगा:

(i) $$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 100}{2 \times 100} = \frac{50}{100} = 50\%$$

(ii) $$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 100}{4 \times 100} = \frac{75}{100} = 75\%$$

(iii) $$\frac{11}{5} = \frac{11 \times 100}{5 \times 100} = \frac{220}{100} = 220\%$$

(iv) $$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 100}{3 \times 100} = \frac{\frac{200}{3}}{100} = \frac{66\frac{2}{3}}{100} = 66\frac{2}{3}\%$$

उदाहरण 2: निम्नलिखित प्रत्येक प्रतिशत को एक भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 25% (ii) $8\frac{1}{3}\%$ (iii) 140%

हल: (i) $25\% = 25 \times \frac{1}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

(ii) $8\frac{1}{3}\% = \frac{25}{3}\% = \frac{25}{3} \times \frac{1}{100} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}$

(iii) $140\% = 140 \times \frac{1}{100} = \frac{140}{100} = \frac{7}{5}$

इस प्रकार आपने देखा कि *किसी प्रतिशत को भिन्न के रूप में बदलने के लिए हम प्रतिशत बताने वाली संख्या को $\frac{1}{100}$ से गुणा करते हैं और इस प्रकार प्राप्त भिन्न को सरल कर लेते हैं।*

उदाहरण 3: निम्नलिखित प्रत्येक दशमलव को प्रतिशत के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 0.35 (ii) 0.125 (iii) 2.25

हल: (i) $0.35 = \frac{0.35 \times 100}{100} = \frac{35}{100} = 35\%$

(ii) $0.125 = \frac{0.125 \times 100}{100} = \frac{12.5}{100} = 12.5\%$

(iii) $2.25 = \frac{2.25 \times 100}{100} = \frac{225}{100} = 225\%$

इस प्रकार *एक दशमलव को प्रतिशत के रूप में लाने के लिए हम दशमलव व्यक्त करने वाले बिन्दु को दो स्थान दाईं ओर खिसका देते हैं और इस प्रकार प्राप्त संख्या के साथ % का संकेत. लगा देते हैं।*

उदाहरण 4: निम्नलिखित प्रत्येक प्रतिशत को दशमलव के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 38% (ii) 16.5% (iii) 320.5%

हल: (i) $38\ \% = 38 \times \frac{1}{100} = \frac{38}{100} = 0.38$

(ii) $16.5\% = 16.5 \times \frac{1}{100} = \frac{16.5}{100} = 0.165$

(iii) $320.5\% = 3.205 \times \frac{1}{100} = \frac{320.5}{100} = 3205$

इस प्रकार ***किसी प्रतिशत को दशमलव में बदलने के लिए हम % का संकेत हटाकर दशमलव बिन्दु को दो स्थान बाईं ओर खिसका देते हैं।***

टिप्पणी: क्योंकि अनुपातों को भिन्नों के रूप में देखा-समझा जाता है, अत: हम ऊपर बताई गई विधियों से अनुपातों को प्रतिशतों में, और प्रतिशतों को अनुपातों में व्यक्त कर सकते हैं।

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित प्रत्येक भिन्न या मिश्रित संख्या को प्रतिशत के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $1\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{7}{50}$ (iii) $\frac{65}{40}$ (iv) $2\frac{2}{5}$ (v) $\frac{1}{3}$

(vi) $1\frac{7}{8}$ (vii) $33\frac{1}{3}$ (viii) $\frac{1}{4}$ (ix) $\frac{5}{16}$

2. निम्नलिखित प्रत्येक प्रतिशत को भिन्न या मिश्रित संख्या के रूप में बदलिए:

(i) 20% (ii) 36% (iii) 21% (iv) 75% (v) 110%

(vi) 350% (vii) 150% (viii) 250% (ix) 100%

3. निम्नलिखित प्रत्येक दशमलव को प्रतिशत के रूप में बदलिए:

(i) 0.25 (ii) 1.25 (iii) 0.07 (iv) 9.6 (v) 0.04

(vi) 5.08 (vii) 0.9 (viii) 1.205 (ix) 16.4

4. निम्नलिखित प्रत्येक प्रतिशत को दशमलव के रूप में बदलिए:

(i) 16% (ii) 28% (iii) 12.5% (iv) 6.25% (v) 76%

(vi) 1.9% (vii) 2% (viii) 0.2% (ix) 95%

5.3 दी गई राशि का प्रतिशत ज्ञात करना

बहुधा हमें किसी राशि का कोई प्रतिशत निकालने की आवश्यकता पड़ती है। जैसे कि 500 का 60% ज्ञात करना, या उदाहरण के लिए हमसे पूछा जाए कि यदि किसी विद्यालय में 1000 विद्यार्थी हों जिनमें 28% लड़कियाँ हों, तो उस विद्यालय में लड़कियों की संख्या क्या होगी? इस प्रकार के प्रतिशत ज्ञात करने की विधि उदाहरणों द्वारा समझाई जाएगी।

उदाहरण 5: 150 का 20% ज्ञात कीजिए।

हल: 150 का 20% = 150 का $\frac{20}{100}$वाँ भाग

$$= \frac{20}{100} \times 150$$

$$= 30$$

इस प्रकार 150 का 20%, 30 हुआ।

उदाहरण 6: किसी विद्यालय के कुल 1000 विद्यार्थियों में से 28% लड़कियाँ हैं। इस विद्यालय में लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : लड़कियों की वाँछित संख्या = 1000 का 28%

$$= \frac{28}{100} \times 1000$$

$$= 280$$

उदाहरण 7: फलों के एक बाग में $16\frac{2}{3}$ % पेड़ सेब के हैं। यदि बाग में कुल 240 पेड़ हों, तो अन्य प्रकार के पेड़ों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : पेड़ों की कुल संख्या = 240

सेब के पेड़ों की संख्या = 240 का $16\frac{2}{3}$ %

= 240 का $\frac{50}{3}$ %

$$= \frac{50}{3} \times \frac{1}{100} \times 240$$

$$= 40$$

∴ अन्य पेड़ों की संख्या $= 240 - 40 = 200$

अत: बाग में अन्य प्रकार के पेड़ों की संख्या 200 है।

प्रश्नावली 5.2

1. मान ज्ञात कीजिए :

   (i) 100 रु का 15% (ii) 600 का 20% (iii) 12 मी का 25%

   (iv) 1 किग्रा का 20% (v) 2 किग्रा का 150% (vi) 1 लीटर का 65%

   (vii) 1 रु का 100% (viii) 1 क्विंटल का 75% (ix) 1800 रु का $4\frac{1}{2}\%$

   (x) 25 लीटर का 16% (xi) 350 किमी का 10% (xii) 1650 लीटर का 37.5%

2. सविता ने एक परीक्षा में 72 % अंक प्राप्त किए। यदि अधिकतम अंक 650 हों, तो सविता को कितने अंक मिले?

3. गोमंग के पास 2000 रु थे। उसने अपने धन का 15% व्यय कर दिया। उसने कितने रुपए व्यय किए?

4. जुबैदा की मासिक आय 8500 रु थी। उसकी आय में 5% की वृद्धि हुई। उसकी मासिक आय में कुल कितनी वृद्धि हुई ? वृद्धि के बाद उसकी आय ज्ञात कीजिए।

5. विलियम ने 10 किमी की दूरी तय की। उसने इस दूरी का 70% भाग बस में तय किया और बाकी पैदल चल कर। बस में उसने कितनी दूरी तय की? कितनी दूर वह पैदल चला?

6. मेरी ने 40 मीटर कपड़ा खरीदा और उसमें से 15% कमीजें बनाने में लगाया। कमीजें बनाने में उसने कितना कपड़ा लगाया ?

7. एक शहर की जनसंख्या में 55% पुरुष हैं। यदि इस शहर की जनसंख्या 128200 हो, तो इसमें स्त्रियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

8. वर्ष के आरंभ में एक विद्यालय में 1600 विद्यार्थी थे। इस वर्ष के बीच विद्यालय की प्रवेश-संख्या में 18% की वृद्धि हुई। इस वर्ष विद्यालय की प्रवेश संख्या में कितनी वृद्धि हुई ?

9. एक स्कूल में विद्यार्थियों की कुल संख्या 1320 है। इसमें 45% लड़के हैं। स्कूल में लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

10. एक परिवार का चावल पर मासिक व्यय 650 रु है। यदि चावल का मूल्य 15% बढ़ जाए, तो इस परिवार की चावल पर मासिक व्यय में वृद्धि ज्ञात कीजिए।

11. एक देश की जनसंख्या 90 करोड़ है। यदि इसमें 2% वार्षिक की वृद्धि हो, तो एक वर्ष बाद इस देश की जनसंख्या क्या हो जाएगी ?

12. एक विशेष प्रकार की वस्तुओं पर सीमा-शुल्क इनके मूल्य का 150% है। इस प्रकार की 12000 रु मूल्य की वस्तु पर हरबिन्दर को कितना सीमा-शुल्क देना पड़ेगा ? यह भी ज्ञात कीजिए कि इस प्रकार उसे इस वस्तु पर कुल क्या व्यय करना पड़ेगा ?

13. व्यय कम करने के लिए एक कम्पनी पैट्रोल की खपत में 15% की कटौती करने का निर्णय लेती है। यदि इस समय प्रति माह 580 लीटर पैट्रोल की खपत हो, तो पैट्रोल की मासिक खपत में क्या कमी होगी ? कम्पनी की पैट्रोल की नई मासिक खपत भी ज्ञात कीजिए।

14. एक रेलगाड़ी की चाल 120 किमी प्रति घंटा है। इसमें 10% की वृद्धि होती है। रेलगाड़ी की चाल में कितनी वृद्धि होती है? इसकी नई चाल भी ज्ञात कीजिए।

15. एक व्यक्ति प्रधानमंत्री राहत कोष में अपनी कुल बचत का 6% दान कर देता है। शेष धन वह अपने एक पुत्र और एक पुत्री में बराबर-बराबर बाँट देता है। यदि इस व्यक्ति की कुल बचत 1500000 रु हो, तो ज्ञात कीजिए कि उसने प्रधानमंत्री राहत कोष में कितनी राशि दान की। उसके पुत्र और पुत्री द्वारा प्राप्त राशि भी क्रमशः ज्ञात कीजिए।

5.4 एक राशि को किसी अन्य राशि के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना

ऐसी अनेक स्थितियाँ आती हैं जहाँ हमें एक राशि को किसी अन्य राशि के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना पड़ता है। उदाहरण के लिए, हमसे पूछा जा सकता

है कि यदि पीटर 500 में से 285 अंक प्राप्त करें, तो पीटर कितने प्रतिशत अंक प्राप्त करता है। यह इस समस्या के तुल्य है कि एक संख्या किसी अन्य संख्या की कितने प्रतिशत है। कोई संख्या किसी अन्य संख्या की कितने प्रतिशत है, यह ज्ञात करने की विधि उदाहरणों द्वारा समझाई जाएगी।

उदाहरण 8: संख्या 8 संख्या 25 की कितने प्रतिशत है ?

हल : याद कीजिए कि प्रतिशत से हमारा तात्पर्य **प्रति सैकड़ा या प्रति सौ या एक के सौवें भाग** (शतांश) से होता है। अतः हम वाँछित कार्य निम्न प्रकार करेंगे:

25 में से अर्थात् प्रति 25 पर, संख्या है 8

100 में से अर्थात् प्रति 100 पर, संख्या होगी $\frac{8}{25} \times 100 = 532$

इस प्रकार, वाँछित प्रतिशत 32 हुआ।
दूसरे शब्दों में, संख्या 8, संख्या 25 की 32% है।
टिप्पणी : आप सरलता से जाँच कर सकते हैं कि 25 का 32%, 8 है।

इस प्रकार, ***यह ज्ञात करने के लिए कि पहली संख्या दूसरी संख्या की कितने प्रतिशत है, हम पहली संख्या को दूसरी संख्या से भाग देकर परिणाम को 100 से गुणा कर देते हैं।***

उदाहरण 9 : पीटर ने अधिकतम अंकों 500 में से 285 अंक प्राप्त किए। पीटर द्वारा प्राप्त अंकों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल : अंकों का वाँछित प्रतिशत $= \frac{285}{500} \times 100 = 57$

अतः पीटर ने 57 % अंक प्राप्त किए।

उदाहरण 10: 3.5 किग्रा, 25 किग्रा का कितने प्रतिशत हैं ?

हल : ध्यान दीजिए कि यहाँ हमें यह ज्ञात करना है कि संख्या 3.5, संख्या 25 की कितने प्रतिशत है। अतः

वाँछित प्रतिशत $= \frac{35}{25} \times 100 = \frac{3.5 \times 10}{25 \times 10} \times 100 = \frac{35}{250} \times 100 = 14$

इस प्रकार, 3.5 किग्रा 25 किग्रा, का 14% है।

उदाहरण 11: एक टोकरी में 300 आम हैं। 75 आम कुछ विद्यार्थियों में बाँट दिए जाते हैं। टोकरी में अब कितने प्रतिशत आम बचे हैं?

हल : आरम्भ में आमों की संख्या = 300

बाँटे गए आम = 75

∴ टोकरी में बचे हुए आम = 300 − 75 = 225

∴ बचे हुए आमों का प्रतिशत = $\frac{225}{300} \times 100 = 75$

इस प्रकार, टोकरी में अब 75% आम बचे हैं।

उदाहरण 12: गणित में जमशेद ने 700 में से 553, तथा गीता ने 600 में से 486 अंक प्राप्त किए। दोनों में से किसका प्रदर्शन अच्छा रहा?

हल : दोनों की कुशलता की तुलना के लिए हम इनके अंकों को प्रतिशत में बदल लेंगे। ऐसा करने पर जमशेद द्वारा प्राप्त अंक = $\frac{553}{700} \times 100\% = 79\%$

गीता द्वारा प्राप्त अंक = $\frac{486}{600} \times 100\% = 81\%$

क्योंकि 81 > 79,

इसलिए गीता का प्रदर्शन अच्छा रहा।

●●●

प्रश्नावली 5.3

1. कितने प्रतिशत है

(i) 20, 200 का ? (ii) 16, 250 का ?

(iii) 5 किग्रा, 15 किग्रा का ? (iv) 18 लीटर, 75 लीटर का ?

(v) 280, 3000 का ? (vi) 800 रु, 2400 रु का ?

(vii) 80 संतरे, 1200 संतरों का ? (viii) 875 मी, 2 किमी का ?

(ix) 500 रु, 500 रु का ? (x) 1600 रु, 800 रु का ?

2. एक स्कूल के कुल 800 विद्यार्थियों में से 560 लड़कियाँ हैं। स्कूल में लड़कियों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

3. वहीदा ने गणित की परीक्षा में 75 में से 60 अंक प्राप्त किए। गणित में वहीदा के प्राप्तांकों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

4. एक टोकरी के कुल 400 सेबों में से 16 सेब सड़े हुए निकले। टोकरी में सड़े हुए सेबों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

5. एक दुकान में 450 साड़ियाँ थीं। इनमें से 30 एक दिन में बिक गईं। इस दिन बिकी साड़ियों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

6. एक चुनाव में 75000 अधिकृत मतदाताओं में से 50000 ने मत डाले। कितने प्रतिशत अधिकृत मतदाताओं ने अपने मत डाले?

7. अपनी 15000 रु की आय में से संगमा ने 10200 रु व्यय कर दिए। उसने अपनी आय के कितने प्रतिशत की बचत की?

8. किसी वस्तु-विशेष पर उत्पादन-शुल्क 5220 रु से घट कर 3480 रु रह गया। इस वस्तु के उत्पादन शुल्क में दी गई प्रतिशत छूट ज्ञात कीजिए।

   [**संकेत:** प्रतिशत छूट आरम्भ के उत्पादन शुल्क, अर्थात् 5220 रु पर निकाली जाएगी।]

9. टेलिविजन (टी.वी.) बनाने वाली एक कम्पनी घोषणा करती है कि रंगीन टी.वी. अब 11600 रु में मिल रहा है। इससे पहले इस टी.वी. का मूल्य 17400 रु था। इस कम्पनी द्वारा बेचे जा रहे रंगीन टी.वी. के मूल्य में दी जाने वाली प्रतिशत छूट ज्ञात कीजिए।

10. एक विद्यालय के कुल 1200 विद्यार्थियों में से 240 एक दिन श्रमदान के लिए गए। उस दिन कितने प्रतिशत विद्यार्थी श्रमदान के लिए नहीं गए?

11. एक क्रिकेट टीम ने 16 मैच खेले। इस टीम ने 6 मैच जीते और 2 मैचों में यह टीम हार गई। 8 मैच 'ड्रा' (draw) हो गए। यह टीम कितने प्रतिशत मैचों में (i) जीती ? (ii) हारी ?

    ड्रा में समाप्त होने वाले मैचों का प्रतिशत भी ज्ञात कीजिए।

12. एक स्कूल में 1264 विद्यार्थी हैं। इनमें से 316 स्कूल-बस द्वारा स्कूल आते हैं, 158 पैदल आते हैं और शेष अन्य प्रकार के वाहनों से स्कूल आते हैं।

कितने प्रतिशत विद्यार्थी स्कूल आते हैं:

(i) स्कूल-बस से ? (ii) पैदल ? (iii) अन्य प्रकार के वाहनों से ?

13. एक ड्रम में 250 लीटर मिट्टी का तेल था। 5 लीटर मिट्टी का तेल एक छेद से बह गया। ड्रम में कितने प्रतिशत मिट्टी का तेल बचा रहा?

14. कोयले की एक खदान के कुल 50400 टन उत्पादन में से 5040 टन कोयला बाहर निकालने में नष्ट हो गया। कुल उत्पादन का कितने प्रतिशत शुद्ध (net) कोयला बाहर निकाला गया?

15. किसी विशेष वर्ष में वैज्ञानिक अनुसंधान (research) के कुल 300 करोड़ रुपयों के बजट में से 36 करोड़ रुपए परमाणु ऊर्जा (atomic energy) विभाग को दिए गए। परमाणु ऊर्जा विभाग को दी गई राशि को वैज्ञानिक अनुसंधान के कुल बजट के प्रतिशत के रूप में व्यक्त कीजिए।

16. विज्ञान विषय में, वेंकट ने 800 में से 548 और सुष्मिता ने 600 में से 460 अंक प्राप्त किए। किसका प्रदर्शन अच्छा रहा?

5.5 लाभ-हानि

यह व्यावहारिक नहीं है कि प्रत्येक व्यक्ति अपनी आवश्यकता की सब वस्तुएँ स्वयं बनाए या पैदा करे। इसलिए प्रायः हम अधिकतर वस्तुएँ आस-पास के दुकानदारों से जिन्हें *फुटकर विक्रेता (retailer)* कहते हैं, खरीदते हैं। ये दुकानदार अपना सामान या तो सीधे *निर्माता* से, या फिर ***थोक विक्रेता*** *(wholesaler)* कहलाने वाले बड़े-बड़े दुकानदारों से खरीदते हैं। फुटकर विक्रेता निर्माता या थोक विक्रेता से सामान खरीदने के लिए जो धन उन्हें देता है वह इस फुटकर विक्रेता के लिए खरीदे गए सामान का ***क्रय मूल्य*** *(cost price)* या संक्षेप में ***क्र.मू.*** कहलाता है। जिस कीमत पर दुकानदार सामान बेचता है, वह सामान का ***विक्रय मूल्य*** *(selling price)* या संक्षेप में ***वि.मू.*** कहलाता है।

यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उसके क्रय मूल्य से अधिक हो, तो हम कहते हैं कि दुकानदार को *लाभ* (*profit* या *gain*) हुआ है। वास्तव में

लाभ = विक्रय मूल्य − क्रय मूल्य (जब वि. मू. > क्र. मू.)

इस दशा में, विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ

और क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य − लाभ

परंतु यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उसके क्रय मूल्य से कम हो, तो हम कहते हैं कि दुकानदार को *हानि (loss)* हुई है।

वास्तव में,

हानि = क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य (जब वि. मू. < क्र. मू)

इस दशा में,

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य - हानि

और क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य + हानि

दो बिक्रियों में हुए लाभ या हानि की तुलना के लिए, ***लाभ और हानि को हम क्रय मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करते हैं*** (ध्यान रहे, *यह प्रतिशत विक्रय मूल्य पर नहीं निकाला जाता)।* अब कुछ उदाहरणों द्वारा यह बातें स्पष्ट की जाएँगी।

उदाहरण 13 : एक दुकानदार ने एक मेज 3500 रु में खरीदी और 4400 रु में बेच दी। उसका लाभ या उसकी हानि ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ क्रय मूल्य = 3500 रु

और विक्रय मूल्य = 4400 रु

ध्यान दीजिए कि वि. मू. > क्र. मू.। अत: दुकानदार को लाभ हुआ। अब

लाभ = वि. मू. — क्र. मू.

= 4400 रु - 3500 रु = 900 रु

आप सत्यापित कर सकते हैं कि

4400 रु (वि. मू.) = 3500 रु (क्र. मू.) + 900 रु (लाभ)

तथा 3500 रु (क्र. मू.) = 4400 रु (वि. मू.) - 900 रु (लाभ)

उदाहरण 14: कपड़े के किसी व्यापारी ने 20 साड़ियाँ 250 रु प्रति साड़ी की दर से खरीदीं। यदि उसने सब साड़ियाँ 4800 रु में बेची हों, तो उसका लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

हल : क्र. मू. = 20 × 250 रु = 5000 रु

वि. मू. = 4800 रु

क्योंकि वि. मू. < क्र. मू., इसलिए कपड़ा व्यापारी को हानि हुई। अब

हानि = क्र. मू. - वि. मू.

= 5000 रु - 4800 रु = 200 रु

आप सरलता से सत्यापित कर सकते हैं कि

4800 रु (वि. मू.) = 5000 रु (क्र. मू.) - 200 रु. (हानि)

और 5000 रु (क्र. मू.) = 4800 रु (वि. मू.) + 200 रु (हानि)

उदाहरण 15: मल्लेश्वरी ने एक प्लास्टिक की चादर 800 रु में खरीदी और 1000 रु में बेच दी। उसका प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

हल : क्र. मू. = 800 रु

वि. मू. = 1000 रु

क्योंकि वि. मू. > क्र. मू.,

अतः मल्लेश्वरी का लाभ = 1000 रु - 800 रु = 200 रु

अतः प्रतिशत लाभ = $\frac{200}{800} \times 100 = 25$

इस प्रकार, मल्लेश्वरी का लाभ 25% है।

उदाहरण 16: जैकब ने एक मकान 470000 रु में खरीदा। उसे यह मकान 458000 रु में बेचना पड़ा। उसका प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

हल : क्र. मू. = 470000 रु

वि. मू. = 458000 रु

क्योंकि वि. मू. < क्र. मू., अतः जैकब को हानि हुई। अब

हानि = क्र. मू. - वि. मू.

= 470000 रु - 458000 रु

= 12000 रु

$\therefore$ प्रतिशत हानि = $\frac{12000}{470000} \times 100$

$= 2\frac{26}{47}$

अतः जैकब को $2\frac{26}{47}$ % हानि हुई।

उदाहरण 17: अनाज के एक व्यापारी ने 600 क्विंटल चावल 7% लाभ पर बेचा। यदि उसे चावल 1600 रु प्रति क्विंटल मिला हो, तो उसका कुल लाभ तथा विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: क्र. मू. = 600 × 1600 रु = 960000 रु

लाभ = 7%

∴ व्यापारी का कुल लाभ = 960000 रु का 7%

$= \frac{7}{100} \times 960000$ रु = 67200 रु

साथ ही, वि. मू. = क्र. मू. + लाभ

= 960000 रु + 67200 रु

= 1027200 रु

इस प्रकार, व्यापारी का कुल लाभ 67200 रु और चावल का वि. मू. 1027200 रु है।

●●●

प्रश्नावली 5.4

1. निम्नलिखित सारणी के रिक्त स्थानों में उपयुक्त राशि भरकर (जहाँ-जहाँ सम्भव हो) उसे पूरा कीजिए :

	क्रय मूल्य (क्र. मू.)	*विक्रय मूल्य* (वि. मू.)	*लाभ*	*हानि*
(i)	800 रु	880 रु	–	–
(ii)	600 रु	570 रु	–	–
(iii)	500 रु	–	82 रु	–
(iv)	2560 रु	–	–	450 रु
(v)	–	9550 रु	–	350 रु
(vi)	–	8250 रु	350 रु	–

2. रिक्त स्थानों में उपयुक्त राशियाँ भरकर (जहाँ-जहाँ सम्भव हो), निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए:

	क्रय मूल्य (क्र. मू.)	*विक्रय मूल्य* (वि. मू.)	*लाभ*	*हानि*	*लाभ %*	*हानि %*
(i)	450 रु	–	90 रु	–	–	–
(ii)	3100 रु	–	–	62 रु	–	–
(iii)	720 रु	570 रु	–	–	–	–
(iv)	1580 रु	1817 रु	–	–	–	–
(v)	2170 रु	–	–	–	–	8%
(vi)	21600 रु	–	–	–	6%	–
(vii)	–	3600 रु	600 रु	–	–	–
(viii)	–	21280 रु	–	3040 रु	–	–
(ix)	25600 रु	–	–	–	25%	–
(x)	88000 रु	–	–	–	–	10%

3. एक घड़ी 540 रु में खरीदी गई और 450 रु में बेची गई। इस सौदे में होने वाला लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

4. एक फल-विक्रेता 100 संतरों की टोकरी 250 रु में खरीदता है। वह संतरों को 27 रु प्रति दर्जन की दर से बेच देता है। उसका लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

5. करीम ने 150 दर्जन पेंसिलें 20 रु प्रति दर्जन की दर से खरीदीं। उसने पेंसिलों को 2.50 रु प्रति पेंसिल की दर से बेचा। उसका प्रतिशत लाभ या हानि निकालिए।

6. 300 किग्रा चावल 14 रु प्रति किग्रा खरीदा गया और 5% हानि पर बेच दिया गया। हानि और विक्रय मूल्य निकालिए।

7. एक वस्तु 9000 रु में खरीदी गई और 8% लाभ पर बेच दी गई। लाभ और विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

8. फिलिप ने 50 दर्जन केले 700 रु में खरीदे। 5 दर्जन केले सड़े हुए निकले, और इसलिए वे बेचे नहीं जा सके। 20% लाभ कमाने के लिए फिलिप को शेष केले कितने रुपए प्रति दर्जन बेचने चाहिए?

9. एक पुस्तक-विक्रेता किसी पुस्तक की 300 प्रतियाँ 15% लाभ पर बेचता है। यदि एक पुस्तक का क्र. मू. 48 रु हो, तो पुस्तकों का वि. मू. ज्ञात कीजिए।

10. एक मशीन 6600 रु में बेची गई। यदि उसका क्रय मूल्य 7500 रु था, तो इस सौदे में होने वाला प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

11. एक घोड़ा 8000 रु में खरीदा गया और 6% हानि पर बेच दिया गया। घोड़ा किस मूल्य पर बेचा गया?

12. बशीर ने एक मेज 2500 रु की खरीदी। 16% लाभ पाने के लिए बशीर इस मेज को किस मूल्य पर बेचे?

13. जॉर्ज ने एक कार 225000 रु की खरीदी और 213750 रु में बेची। उसका प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

14. एक वस्तु को 450 रु में बेचने से मुरलीधरन को 50 रु की हानि होती है। 20% लाभ पाने के लिए मुरलीधरन को यह वस्तु कितने में बेचनी चाहिए?

15. एक दुकानदार ने 288 संतरे 480 रु के खरीदे। इनमें से 150 संतरे उसने 2.50 रु प्रति संतरे की दर से बेचे और शेष संतरों को उसने 240 रु में बेच दिया। उसका प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

16. ज्योतसना ने दो भैंसें क्रमशः 18000 रु और 15000 रु की खरीदीं। उसने उन्हें क्रमशः 15% हानि और 19% लाभ पर बेचा। प्रत्येक भैंस का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए। इस सौदे में कुल मिलाकर प्रतिशत लाभ या हानि भी ज्ञात कीजिए।

17. अब्दुल ने 200 किग्रा सेब 25 रु प्रति किग्रा की दर से खरीदे। इनमें से 50 किग्रा छोटे आकार के निकले जिन्हें उसने 20 रु प्रति किग्रा की दर से बेच दिया। शेष सेब उसने 30 रु प्रति किग्रा की दर पर बेचे। अब्दुल का कुल प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

18. फातिमा ने 1200 अंडे 16 रु प्रति दर्जन की दर पर खरीदे। वह इन्हें प्रति सौ किस दर पर बेचे कि उसे 15% का लाभ हो?

19. नीरू ने 2400 केले 15 रु प्रति दर्जन खरीदे। उसने इनमें से 1350 तो 4 रु में 2 की दर पर बेचे और शेष 8 रु में 5 की दर पर बेचे। उसका प्रतिशत

लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

20. कृष्णमूर्ति ने 25 रु प्रति दर्जन की दर से संतरे खरीदे। उसे ये संतरे 4% हानि पर बेचने पड़े। एक संतरे का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
[**संकेत** : पहले 1 दर्जन संतरों का विक्रय मूल्य निकालिए।]

5.6 साधारण ब्याज

हमारे चारों ओर जो कुछ घट रहा होता है उसमें कहीं न कहीं रुपए-पैसे की बात आ ही जाती है। आवश्यकता पड़ने पर व्यापारिक संस्थान या व्यक्ति, अपने मित्रों, सम्बन्धियों या अन्य किसी एजेन्सी से रुपया उधार लेते हैं। यदि हम किसी अन्य व्यक्ति के मकान में रहते हैं, तो उसके मकान का उपयोग करने के लिए हम मकान मालिक को **मकान के किराए** के रूप में कुछ धन देते हैं। इसी भाँति जब हम किसी एजेन्सी (बैंक, वित्त-कम्पनी या व्यक्ति) अर्थात् *ऋणदाता (lender)* से किसी नियत अवधि के लिए धन उधार लेते हैं, तो नियत अवधि समाप्त होने पर हम ऋणदाता का धन तो लौटाते-ही-लौटाते हैं, साथ ही उसके धन का उपयोग करने के लिए हम उसे कुछ अतिरिक्त राशि भी देते हैं। उधार लिया गया धन ***मूलधन*** *(principal)* कहलाता है। उधार लिए गए धन के उपयोग के बदले हम जो अतिरिक्त राशि ऋणदाता को देते है, वह ***ब्याज*** *(interest)* कहलाती है। इसी प्रकार, जब हम बैंक में धन जमा करते हैं, तो बैंक हमारे धन का उपयोग करता है और बदले में हमें कुछ ब्याज देता है। नियत अवधि या समय के अन्त में ऋणदाता को जो कुल धन दिया जाता है, वह ***मिश्रधन*** *(amount)* कहलाता है। इस प्रकार,

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

यदि हम मिश्रधन को A, मूलधन को P और ब्याज को I लिखें, तो

$$A = P + I$$

ब्याज एक समझौते पर आधारित होता है जो मूलधन की प्रति इकाई **दर** *(rate)* के रूप में होता है। **दर को प्राय: मूलधन के वार्षिक प्रतिशत** के रूप में व्यक्त करते हैं। (जैसे कि 10% वार्षिक। तात्पर्य यह है कि यदि 100 रु एक वर्ष के लिए उधार लिए, तो ब्याज के 10 रु देने होंगे)।

टिप्पणियाँ :

1. कभी-कभी ब्याज की दर (वार्षिक न होकर) छमाही, तिमाही या मासिक भी हो सकती है।

2. उधार की अवधि या समय (T) चाहे कुछ भी हो, यदि मूलधन पूरी अवधि में वही रहे, तो ब्याज को ***साधारण ब्याज** (simple interest)* कहा जाता है। इस अध्याय में ब्याज से हमारा तात्पर्य साधारण ब्याज से होगा।

अब ऐकिक विधि का उपयोग कर उदाहरणों की सहायता से हम यह समझाएँगे कि (साधारण) ब्याज और मिश्रधन कैसे ज्ञात किए जाते हैं।

उदाहरण 18: 400 रु पर 5% वार्षिक की दर से 1 वर्ष का ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल: दर = 5% वार्षिक । तात्पर्य यह है कि

100 रु पर एक वर्ष का ब्याज = 5 रु

$\therefore$ 1 रु पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{5}{100}$ रु

$\therefore$ 400 रु पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{5}{100} \times 400$ रु

$= 20$ रु

अत: 5% वार्षिक की दर से 400 रु पर 1 वर्ष का ब्याज 20 रु होगा।

उदाहरण 19: 6% वार्षिक की दर से 400 रु पर 3 वर्ष का ब्याज निकालिए।

हल: यहाँ ब्याज की दर 6% वार्षिक है। तात्पर्य यह है कि

100 रु पर 1 वर्ष का ब्याज = 6 रु

$\therefore$ 1 रु पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{6}{100}$ रु

$\therefore$ 400 रु पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{6}{100} \times 400 = 24$ रु

$\therefore$ 400 रु पर 3 वर्ष का ब्याज $= 24 \times 3$ रु $= 72$ रु

अत: 400 रु पर 6% वार्षिक की दर से 3 वर्ष का ब्याज 72 रु होगा।

उदाहरण 20: 500 रु पर 4 वर्ष की अवधि का 8% वार्षिक की दर से ब्याज ज्ञात कीजिए। इस अवधि के अन्त में जो मिश्रधन देना होगा वह भी ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ ब्याज की दर 8% वार्षिक है। अतः

100 रु पर 1 वर्ष का ब्याज = 8 रु

$\therefore$ 1 रु पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{8}{100}$ रु

$\therefore$ 500 रु पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{8}{100} \times 500 = 40$ रु

$\therefore$ 500 रु पर 4 वर्ष का ब्याज $= 40 \times 4 = 160$ रु

अब, मिश्रधन $A = P$ (मूलधन) $+ I$ (ब्याज) = 500 रु + 160 रु

= 660 रु

इस प्रकार, 4 वर्ष के अन्त में ब्याज 160 रु और मिश्रधन 660 रु होगा।

उदाहरण 21: चार्ली ने 6000 रु $2\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए एक बैंक में जमा किए। 4% वार्षिक की दर से चार्ली को बैंक कितना ब्याज और कितना मिश्रधन देगा?

हल: दर = 4% वार्षिक, अर्थात्

100 रु पर 1 वर्ष का ब्याज = 4 रु

$\therefore$ 1 रु पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{4}{100}$ रु

$\therefore$ 6000 रु पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{4}{100} \times 6000$ रु = 240 रु

$\therefore$ 6000 रु पर $2\frac{1}{2}$ वर्ष अर्थात् $\frac{5}{2}$ वर्ष का ब्याज $= 240 \times \frac{5}{2}$ रु

= 600 रु

साथ ही, मिश्रधन $A = P + I$

= 6000 रु + 600 रु = 6600 रु

अतः बैंक चार्ली को 600 रु ब्याज और कुल मिलाकर मिश्रधन के रूप में 6600 रु देगा।

प्रश्नावली 5.5

1. रिक्त स्थानों को भरिए :

   (i) मूलधन = 500 रु, ब्याज की वार्षिक दर = 8%, समय = 3 वर्ष, ब्याज =---

   (ii) मूलधन = 2000 रु, ब्याज की दर = 6% वार्षिक, समय = 4 वर्ष, ब्याज = ----

   (iii) मूलधन = 1800 रु, समय = 2 वर्ष, दर = $5\frac{1}{2}\%$ वार्षिक, ब्याज = ----, मिश्रधन =------

   (iv) मूलधन = 2600 रु, समय = $2\frac{1}{2}$ वर्ष, ब्याज की दर = 4% वार्षिक, ब्याज =----, मिश्रधन = ----

   (v) मूलधन = 6000 रु, समय = $3\frac{1}{2}$ वर्ष, ब्याज की दर = $4\frac{1}{2}\%$ वार्षिक, ब्याज =----, मिश्रधन = ----

2. अनिता अपने बचत खाते में 5000 रु जमा कराती है। बैंक 4% वार्षिक की दर से ब्याज देता है। इस धन पर अनिता को 1 वर्ष बाद बैंक से कितना ब्याज मिलेगा ?

3. सलमा ने 12000 रु एक वित्त कम्पनी में जमा कराए। कम्पनी 15% वार्षिक की दर से ब्याज देती है। $4\frac{1}{2}$ वर्ष बाद सलमा को कितना मिश्रधन मिलेगा ?

4. 5000 रु पर 6% वार्षिक की दर से 146 दिन का ब्याज ज्ञात कीजिए।

   [संकेत : 146 दिन $=\frac{146}{365}$ वर्ष $=\frac{2}{5}$ वर्ष]

5. अकबर ने 11% वार्षिक की दर पर 3800 रु उधार लिए। $1\frac{1}{2}$ वर्ष बाद उसे कितना ब्याज देना पड़ेगा ?

6. मूर्ति ने जॉर्ज से 8% वार्षिक की दर पर 27000 रु उधार लिए और $2\frac{1}{2}$ वर्ष बाद कुल राशि चुका दी। ज्ञात कीजिए कि मूर्ति ने कितना मिश्रधन चुकाया ।
7. विलियम ने 52000 रु एक वित्त कम्पनी में जमा किए। यह कम्पनी 8% वार्षिक की दर पर ब्याज देती है। विलियम को 2 वर्ष बाद मिलने वाला ब्याज और मिश्रधन ज्ञात कीजिए।
8. शबाना ने अपनी सहेली से 3% वार्षिक की दर पर 6500 रु उधार लिए। 6 मास बाद उसने उधार चुका दिया। ज्ञात कीजिए कि उसने अपनी सहेली को कितनी राशि चुकाई।
9. डायना ने एक स्कूल को 20000 रु दान में दिए। इस राशि के ब्याज से प्रति वर्ष समान मूल्य की 5 छात्रवृत्तियाँ दी जाती हैं। यदि दानराशि पर 10% वार्षिक की दर से ब्याज मिलता है, तो प्रत्येक छात्रवृति का मूल्य ज्ञात कीजिए।
10. कासिम और राजा को 5600 रु की समान राशियाँ $12\frac{1}{2}$% वार्षिक की दर से क्रमशः $2\frac{1}{2}$ वर्ष तथा $4\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए उधार दी गईं। कासिम और राजा को जो ब्याज देना पड़ेगा, उनमें अंतर ज्ञात कीजिए।
11. एक किसान ने दूसरे किसान से 12% वार्षिक की दर से 24000 रु उधार लिए। $2\frac{1}{2}$ वर्ष के अन्त में पहले किसान ने दूसरे किसान को 12000 रु और एक गाय देकर उधार चुकता कर दिया। गाय का मूल्य ज्ञात कीजिए।

    [**संकेत** : मिश्रधन = 12000 रु + गाय का मूल्य]
12. फीरोज ने अमरीक सिंह से 8% वार्षिक की दर पर 2000 रु उधार लिए। 6 वर्ष बाद फीरोज ने अमरीक सिंह को 2500 रु और एक घड़ी देकर उधार चुका दिया। घड़ी का मूल्य ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. जिस भिन्न का हर 100 हो उसे ***प्रतिशत*** कहते हैं।
2. प्रतिशत को भिन्न के रूप में व्यक्त करने के लिए, प्रतिशत बताने वाली संख्या को $\frac{1}{100}$ से गुणा कर प्राप्त होने वाली भिन्न को सरल कर लेते हैं।
3. दशमलव को प्रतिशत के रूप में व्यक्त करने के लिए, दशमलव बिन्दु को दो स्थान दाईं ओर खिसकाकर % का संकेत लगा देते हैं।
4. प्रतिशत को दशमलव के रूप में व्यक्त करने के लिए % संकेत को हटाकर दशमलव बिन्दु को दो स्थान बाईं ओर खिसका देते हैं।
5. जब वि. मू. > क्र. मू., तब लाभ = वि. मू. - क्र. मू.
6. जब वि. मू. < क्र. मू., तब हानि = क्र. मू. - वि.. मू.
7. $\text{लाभ } \% = \frac{\text{लाभ } \times 100}{\text{क्र. मू.}}$

   $\text{हानि } \% = \frac{\text{हानि } \times 100}{\text{क्र. मू.}}$
8. ऋणदाता से उधार लिया गया धन ***मूलधन*** कहलाता है। नियत समय के बाद मूलधन के अतिरिक्त दिया गया धन ***ब्याज*** कहलाता है।
9. नियत समय के अन्त में दिया गया कुल धन ***मिश्रधन*** कहलाता है। अत: मिश्रधन = मूलधन + ब्याज ।
10. दी गई राशि पर ब्याज निकालने के लिए. प्रतिशत की धारणा और ऐकिक विधि का प्रयोग किया जा सकता है।
11. यदि ऋण की पूरी अवधि में मूलधन वही रहे, तो इस मूलधन पर लगने वाले ब्याज को *साधारण ब्याज* कहते हैं।

अतीत के झरोखे से

वाणिज्य और व्यापार के क्रियाकलापों की कहानी उतनी ही पुरानी है जितनी मानव सभ्यता की। आदिम मानव शिकार कर एक या दो दिन के लिए आवश्यक भंडार ही रखता था। सभ्यता के विकास के साथ-साथ आदिम व्यक्तियों ने समूह में रहना सीखा और आवश्यकता से अधिक उत्पादन करना भी आरम्भ किया। अतिरिक्त खाद्य सामग्री तथा अन्य वस्तुओं का उपयोग दैनिक जीवन के लिए आवश्यक अन्य सामान की अदला-बदली (विनिमय) में होने लगा। यहाँ से वाणिज्य और व्यापार की कहानी आरम्भ हुई। बाद में, विनिमय के लिए मुद्रा का प्रयोग होने लगा जिससे व्यापार फलने-फूलने लगा। ईसा से 2450 से 2330 वर्ष पूर्व की मिट्टी के शिलालेखों से इस बात के प्रमाण मिलते हैं कि बेबीलोनिया के लोग उस समय बिलों, बचन-पत्रों या रूक्कों, न्यासों या गिरवी पत्रों, करों, साधारण तथा चक्रवृद्धि ब्याज और अन्य व्यावसायिक गतिविधियों से परिचित थे।

भारतीय गणितज्ञ ***ब्रह्मगुप्त*** और ***भास्कर*** त्रैराशिक नियम (तीन का नियम) बनाने के लिए प्रसिद्ध हैं। यह नियम सदियों तक व्यापारियों के काम आता रहा और इसलिए उनकी आँखों का तारा बना रहा। 628 ई के लगभग ब्रह्मगुप्त ने यह नियम कुछ इस प्रकार बनाया :

"*त्रैराशिक नियम* में *तर्क* (*argument*), *फल* (*fruit*) और *माँग* (*requisition*) पदों के नाम हैं। तर्क और माँग का एक प्रकार का होना आवश्यक है। माँग और फल के गुणनफल को तर्क से विभाजित करने पर *परिणाम* या *उत्पाद* (*produce*) प्राप्त होता है।"

एक अन्य भारतीय गणितज्ञ ***महावीर*** (लगभग 850 ई) ने भी इस नियम को लगभग इसी रूप में इस प्रकार बताया :

"*फल* और *इच्छा* के गुणनफल को *प्रमाण* से भाग देने पर उत्तर आ जाता है, जब इच्छा और प्रमाण एक ही प्रकार के हों।"

चौदहवीं शताब्दी के अन्त में आकर यह बोध हुआ कि तीन का नियम समानुपात से सम्बन्धित है। अनुपात के संकेत ':' और समानुपात के संकेत ': :' संभवतः सर्वप्रथम एक अंग्रेज गणितज्ञ *ऊध्ट्रैड (Oughtred)* ने 1628 ई में दिए।

रोमवासियों ने ऐसी भिन्नों का प्रयोग किया जो सरलता से शतांशों में बदली जा सकती थीं, परन्तु उन्हें प्रतिशत का ज्ञान नहीं था। पन्द्रहवीं शताब्दी की एक इतालवी पाण्डुलिपि में 20%, 10% और 6% के लिए क्रमशः '20 p 100',

'x p cento' तथा 'vi p c°' जैसे व्यंजक बहुलता से मिलते हैं। इस प्रकार प्रतिशत का संकेत आरम्भ में 'per c°', 'pc°' आदि के रूप में पाया जाता है। सत्रहवीं शताब्दी के मध्य में यह संकेत 'per'%' का रूप ले चुका था। अंत में 'per' को छोड़ दिया गया और इस संकेत ने वर्तमान रूप '%' ले लिया।

भारतीय गणितज्ञ ***भास्कर*** ने प्रतिशत का प्रयोग अपनी सुविख्यात पुस्तक ***लीलावती*** में ब्याज के प्रश्न हल करने में किया। सोहलवीं शताब्दी में प्रतिशत का प्रयोग मुख्य रूप से ब्याज तथा लाभ और हानि के परिकलनों में होता था।

वाक्यांश 'लाभ और हानि' उसी अर्थ में प्रयुक्त होता था जिसमें इसे हम आज करते हैं। सोलहवीं शताब्दी में इस विषय की *लोकप्रियता* इस तथ्य से सिद्ध होती हैं कि लगभग 1561 ई की अपनी पुस्तक *Rechenbuch* में एक गणितज्ञ वर्नर *(Werner)* ने इस विषय पर 47 पन्ने लिखे। ऐकिक विधि भी इस अवधि में सबको ज्ञात थी। इस बात का एक प्रमाण यह है कि एक इतालवी गणितज्ञ *टार्टगलिया (Tartagalia)* (लगभग 1556 ई) ने इस विधि का प्रयोग निम्नलिखित प्रश्न के हल में किया:

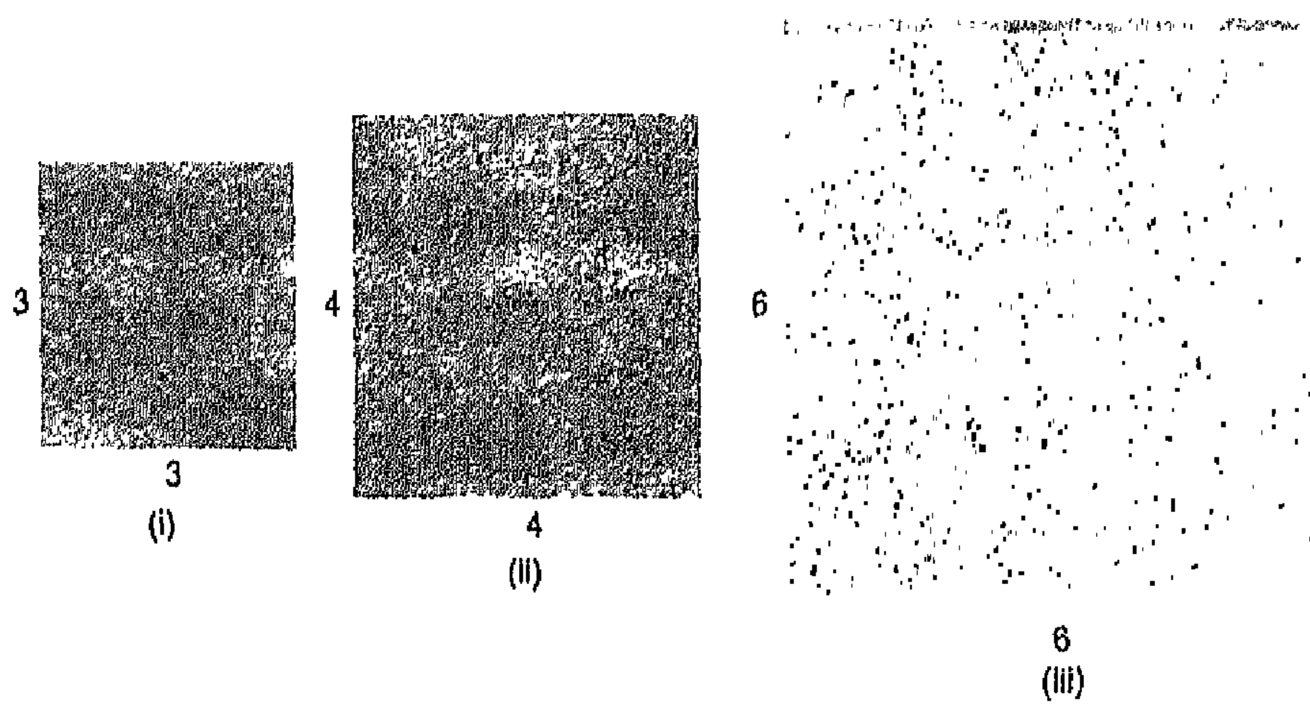
'यदि 1 पौंड रेशम का मूल्य 9 लीरे (lire) 18 सोल्डी (soldi) हो, तो 8 औंस रेशम का मूल्य क्या होगा?'

बीजीय व्यंजक

अध्याय 6

6.1 भूमिका

अभी तक हम संख्याओं को व्यक्त करने के लिए 0, 1, 2, 3, 21, 35, आदि जैसे संख्यांकों का प्रयोग करते आए हैं। अंकगणितीय परिकलनों के लिए हम जोड़, घटा, गुणा तथा भाग की संक्रियाओं के लिए क्रमशः संकेतों +, −, ×, ÷ का प्रयोग करते आए हैं। कभी-कभी संख्याओं को व्यक्त करने के लिए a, b, c, x, y, z आदि अक्षर भी संकेतों के रूप में प्रयोग किए जाते हैं। याद कीजिए कि अध्यायों 1, 2 और 3 में हम पहले ही a, b, c का प्रयोग संख्याओं को व्यक्त करने में कर चुके हैं। अक्षरों का यह प्रयोग हमें व्यापक रूप से सोचने में सहायक होता है। आगे आने वाले उदाहरणों से यह बात स्पष्ट हो जाएगी।



आकृति 6.1

(I) आइए, आकृति 6.1 में दिखाए गए वर्गों को ध्यान से देखें। भुजा 3 मात्रक वाले वर्ग [आकृति 6.1 (i)] का परिमाप (3 + 3 + 3 + 3) मात्रक = 12 मात्रक या 4 × 3 मात्रक है। भुजा 4 मात्रक वाले वर्ग [आकृति 6.1 (ii)] का परिमाप (4 + 4 + 4 + 4) मात्रक = 16 मात्रक या 4 × 4 मात्रक है। इसी प्रकार,

(6 + 6 + 6 + 6) मात्रक = 24 मात्रक या 4 × 6 मात्रक, भुजा 6 मात्रक वाले वर्ग [आकृति 6.1 (iii)] का परिमाप है। ध्यान दीजिए कि प्रत्येक अवस्था में परिमाप भुजा की लम्बाई का चार गुना है। अर्थात्

परिमाप = 4 × (भुजा की लम्बाई)

इस कथन को वर्ग के परिमाप के लिए अक्षर p, और भुजा की लम्बाई के लिए अक्षर s के प्रयोग से और अधिक छोटा बनाया जा सकता है। इस प्रकार, यदि भुजा की लम्बाई s मात्रक हो और परिमाप p मात्रक हो, तो हम लिखेंगे:

$$P = 4 \times S \qquad (1)$$

यह नियम सभी मात्रकों तथा वर्ग की भुजा की सभी सम्भव लम्बाइयों के लिए सही है। ध्यान दीजिए कि यहाँ P और S संख्याओं को व्यक्त कर रहे हैं।

(2) मान लीजिए कि एक हवाई जहाज की चाल 1200 किमी प्रति घंटा है। तब हवाई जहाज द्वारा 2 घंटे में तय की गई दूरी होगी 1200 × 2 किमी = 2400 किमी। हवाई जहाज द्वारा 3 घंटे में तय की गई दूरी होगी 1200 × 3 किमी = 3600 किमी। हवाई जहाज 4 घंटे में दूरी तय करेगा 1200 × 4 किमी = 4800 किमी।

यदि हवाई जहाज की चाल 900 किमी प्रति घंटा रह जाए, तो दो घंटे में तय की गई दूरी 900 × 2 किमी = 1800 किमी होगी, जबकि 3 घंटे में हवाई जहाज दूरी तय करेगा 900 × 3 किमी = 2700 किमी।

ऊपर के उदाहरणों से हम व्यापक रूप में यह कह सकते हैं कि **हवाई जहाज द्वारा तय की गई दूरी चाल तथा समय का गुणनफल होगी।** तात्पर्य यह है कि

दूरी = चाल × समय

दूरी के लिए d, चाल के लिए s तथा समय के लिए अक्षर t का प्रयोग करने पर उक्त कथन को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$d = s \times t \qquad (2)$$

नियम (1) की भाँति यह नियम भी सभी मात्रकों, और s तथा t के सभी सम्भव मानों के लिए सही है। ध्यान दीजिए कि यहाँ भी अक्षर d, s और t संख्याओं के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

इस प्रकार ऊपर के दो उदाहरणों से हम यह देख सकते हैं कि संख्याओं को अक्षरों द्वारा व्यक्त करने से हमें अधिक व्यापक रूप से सोचने में सहायता मिलती

है। दूसरे शब्दों में कहें तो ऐसा करने से हमें एक *नियम* प्राप्त करने में सहायता मिलती है (इस नियम को प्राय: **सूत्र** कहा जाता है)। इस सूत्र के प्रयोग से हम सूत्र में आए अक्षरों का केवल मान बदलकर एक जैसी सहस्त्रों समस्याओं को हल कर सकते हैं।

जो अक्षर संख्याओं को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त होते हैं उन्हें ***अक्षर-संख्याएँ*** *(literal numbers)* कहा जाता है। ध्यान रखिए कि जब तक अन्यथा न कहा जाए, आगे से यह कहने के स्थान पर कि x **एक संख्या को व्यक्त करता है**, हम केवल यह कहा करेंगे कि x **एक संख्या है**। इसी भाँति यह न कह कर कि y एक संख्या को व्यक्त करता है, हम केवल यह कहेंगे कि y एक संख्या है इत्यादि।

क्योंकि अक्षर-संख्याएँ वास्तव में तो संख्याएँ ही होती हैं, अत: संख्याओं के लिए जोड़, घटा, गुणा, भाग आदि संक्रियाओं से जुड़े सभी नियम (चिह्नों वाले भी) इन पर भी लागू होते हैं। इस कारण अक्षर-संख्याएँ इन संक्रियाओं के सभी नियमों एवं गुणों का पालन करती हैं। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित सभी नियम तथा संकेतन सही हैं:

(i) दो अक्षर-संख्याओं x और y के योगफल (योग) को $x + y$ लिखते हैं।

(ii) यदि अक्षर-संख्या y को अक्षर-संख्या x में से घटाया जाए, तो अंतर को $x - y$ लिखते हैं।

(iii) दो अक्षर-संख्याओं x और y के गुणनफल को $x \times y$ या xy लिखते हैं।

(iv) किसी अक्षर-संख्या x के अपने आप से बार-बार गुणनफल को घातांकीय (exponential) रूप में लिखते हैं। इस प्रकार,

$$x \times x \times x = x^3, \qquad x \times x \times x \times x = x^4, \text{ आदि।}$$

(v) किसी अक्षर-संख्या x को किसी अक्षर-संख्या $y (\neq 0)$ से भाग दें, तो भागफल को $\frac{x}{y}$ लिखते हैं।

सभी अक्षर-संख्याओं x, y, z के लिए,

(vi) $x + y = y + x$

(vii) $yz = zy$

(viii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(ix) $x (y + z) = xy + xz$

(x) $(x + y) z = xz + yz$

(xi) $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

अब ऊपर बताए गए नियमों को उदाहरणों से स्पष्ट किया जाएगा।

उदाहरण 1 : वह संख्या लिखिए जो y से 3 कम है।

हल: वह संख्या जो y से 3 कम है, y में से 3 घटाने पर प्राप्त होगी। अत: वाँछित संख्या $y-3$ है।

उदाहरण 2: वह संख्या लिखिए जो y के $\frac{1}{3}$ से 5 अधिक है।

हल: y का $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times y = \frac{y}{3}$

अत: $\frac{y}{3}$ से 5 अधिक संख्या है : $\frac{y}{3}+5$

उदाहरण 3: वह संख्या लिखिए जो x और y के गुणनफल से 5 कम हो।

हल: x और y का गुणनफल $= x \times y = xy$

अत: वाँछित संख्या $= xy - 5$

उदाहरण 4: निम्नलिखित कथनों को संख्याओं, अक्षर-संख्याओं और अंकगणितीय संक्रियाओं का प्रयोग करके व्यक्त कीजिए:

(i) वृत्त का व्यास इसकी त्रिज्या का दुगुना होता है।

(ii) आयत का क्षेत्रफल इसकी लम्बाई और चौड़ाई का गुणनफल होता है।

हल:

(i) यदि वृत्त के व्यास को d से और त्रिज्या को r से व्यक्त करें, तो दिए हुए कथन से प्राप्त होता है:

$$d = 2r$$

(ii) वृत के क्षेत्रफल, लम्बाई और चौड़ाई को क्रमश: A, l और b से व्यक्त करने पर, दिए हुए कथन के अनुसार

$$A = l \times b = lb$$

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखित को संख्याओं, अक्षर-संख्याओं और अंकगणितीय संक्रियाओं का प्रयोग करते हुए लिखिए:
   - (i) संख्याओं 6 और x का योग
   - (ii) संख्या y से 3 अधिक संख्या
   - (iii) संख्या x का एक तिहाई
   - (iv) संख्याओं x और y के योग का आधा
   - (v) संख्या 7 से y कम संख्या
   - (vi) संख्या x में से 7 घटाने पर प्राप्त संख्या
   - (vii) x को y से विभाजित करने पर प्राप्त संख्या से 2 कम संख्या
   - (viii) संख्या x के दुगुने से 3 अधिक संख्या
   - (ix) संख्या x का स्वयं से गुणनफल
   - (x) संख्या z की 5 गुनी संख्या
2. (i) वह संख्या लिखिए जो z से 5 कम हो।
   - (ii) एक संख्या, x से 3 अधिक है। वह संख्या लिखिए ।
   - (iii) दो संख्याओं का योग y है और इनमें से एक संख्या 4 है। दूसरी संख्या लिखिए।
   - (iv) x में 4 जोड़ने से z प्राप्त होता है। z को x के पदों में लिखिए।
   - (v) x में से 4 घटाने पर z प्राप्त होता है। z को x के पदों में लिखिए।
3. निम्नलिखित कथनों को संख्याओं, अक्षर-संख्याओं और अंकगणितीय संक्रियाओं का प्रयोग करते हुए लिखिए। यह भी बताइए कि प्रत्येक अक्षर क्या व्यक्त करता है।
   - (i) किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उसके क्रय मूल्य तथा प्राप्त लाभ का योग होता है।
   - (ii) मिश्रधन, मूलधन तथा ब्याज के योग के बराबर होता है।

6.2 बीजीय व्यंजक

हमने 6 $+ x$, $xy - y$, x^3, $\frac{y}{3} + 5$, $\frac{x+y}{2}$, x^4 आदि जैसे व्यंजकों का प्रयोग किया है। ये सभी ***बीजीय व्यंजक*** हैं। इनके कुछ और उदाहरण हैं : $y - 3x$, $a + b - c$, $4pq - 4pr$, 23, $x^2 + xy$, $18xyz + 3$ आदि। वास्तव में, बीजीय व्यंजक संख्याओं, अक्षर-संख्याओं और अंकगणितीय संक्रियाओं के समायोजन से बनता है। + तथा − के एक या अधिक चिह्न व्यंजक को कई भागों में बाँट देते हैं। अपने चिह्न के साथ प्रत्येक भाग व्यंजक का एक ***पद (term)*** कहलाता है। प्राय: व्यंजक के पहले पद का + चिह्न बना लिखे छोड़ दिया जाता है। उदाहरण के लिए, $+y - 3x$ न लिख कर हम केवल $y - 3x$ ही लिख देते हैं। यहाँ y और $-3x$, व्यंजक $y - 3x$ के पद हैं। a, $+b$ (या b) और $-c$, व्यंजक $a + b - c$ के पद हैं। $18xyz + 3$ में $18xyz$ और 3 इस बीजीय व्यंजक के पद हैं।

जिस बीजीय व्यंजक में केवल एक ही पद हो, उसे ***एकपदी (monomial)*** कहते हैं। 23, $2y$, $5x$, xyz, $4s$ आदि एकपदियों के उदाहरण हैं। दो पदों वाला व्यंजक ***द्विपद (binomial)*** कहलाता है। द्विपदों के कुछ उदाहरण हैं : $y - 3x$, $23 - z$, 21 + 2w आदि। अब यह बताइए कि त्रिपद (trinomial) क्या होंगे।

तीन पदों वाला व्यंजक ***त्रिपद*** कहलाता है। उदाहरण के लिए, $a^2 + ab + b^2$, $x - y - z$ त्रिपद हैं। (त्रिपदों के कुछ और उदाहरण दीजिए।)

दो बीजीय व्यंजक ***समान*** या ***बराबर*** कहलाते हैं, यदि दोनों में ठीक वही पद (किसी भी क्रम में) हों। उदाहरण के लिए, $y^2 + 2x^2$ और $2x^2 + y^2$ समान व्यंजक हैं।

$18xyz$ जैसे पद में 18, x, y और z इसके ***गुणनखंड (factors)*** कहलाते हैं। x, y और z तो ***अक्षरीय गुणनखंड*** हैं। जबकि 18 ***संख्यात्मक गुणनखंड*** है। इनमें से प्रत्येक शेष गुणनखंडों के गुणनफल का ***गुणांक (coefficient)*** कहलाता है। इस प्रकार y, पद $18xyz$ में $18xz$ का गुणांक है। 18 पद $18xyz$ में xyz का गुणांक है; xy, $18z$ का गुणांक है; z, $18xy$ का गुणांक है, आदि। कभी-कभी केवल संख्यात्मक गुणांक को ही पद का गुणांक कहा जाता है। इस अर्थ में हम पद $18xyz$ में 18 को इस पद का गुणांक कहेंगे। जब किसी पद में गुणांक 1 या −1 हो, तो '1' को प्राय: लुप्त कर देते हैं। उदाहरणत: $1x$ को x लिखते हैं और $-1x$ को $-x$ लिखते हैं।

जब पदों के अक्षरीय गुणांक वही हों, तो उन्हें ***समान पद*** *(like terms)* कहते हैं। अन्यथा इन्हें ***असमान पद*** *(unlike terms)* कहा जाता है। उदाहरण के लिए, व्यंजक $2xy - 3x + 7xy + 4x$ में $2xy$ तथा $7xy$ समान पद हैं; $-3x$ और $4x$ समान पद हैं। परन्तु व्यंजकों $a + b - c$, $y - 3x$, या $4pq - 4qr - 4rs + 4st$ के सभी पद असमान हैं।

उदाहरण 5: निम्नलिखित में एकपदी, द्विपद और त्रिपद बताइए:

(i) $7p - 4q$ (ii) $4p - 3q + 7s$ (iii) $3z$

हल: (i) $7p - 4q$ में $7p$ और $-4q$ दो पद हैं। अतः यह द्विपद है।

(ii) $4p - 3q + 7s$ में $4p, -3q$ और $7s$ तीन पद हैं। अतः यह त्रिपद है।

(iii) $3z$ में केवल एक पद $3z$ है। अतः यह एकपदी है।

उदाहरण 6: निम्नलिखित में से किस युग्म के पद समान हैं?

(i) $16z, 18x$ (ii) $17xy, -8xy$ (iii) $10xy, -5y$ (iv) $15x^2y, 15xy$

हल: (i) $16z$ और $18x$ में अक्षरीय गुणनखंड क्रमशः z और x हैं। अर्थात् $16z$ और $18x$ के अक्षरीय गुणनखंड वही नहीं हैं। अतः ये असमान पद हैं।

(ii) $17xy$ और $-8xy$ में वही अक्षरीय गुणनखंड xy है। अतः ये पद समान हैं।

(iii) $10xy$ का अक्षरीय गुणनखंड xy है, जबकि $-5y$ का y है। क्योंकि दोनों पदों के अक्षरीय गुणनखंड अलग-अलग हैं, अतः ये असमान पद हैं।

(iv) दिए गए पदों के अक्षरीय गुणनखंड क्रमशः x^2y तथा xy हैं। अतः ये असमान पद हैं।

उदाहरण 7: निम्नलिखित व्यंजकों के पदों में x का गुणांक क्या है?

(i) $8xyz$ (ii) $-7yz + 6x$ (iii) $x - y$

हल: (i) पद $8xyz = (8yz)x$ है। अतः x का गुणांक $8yz$ है।

(ii) $-7yz + 6x$ में x वाला पद $6x$ है। $6x$ में x का गुणांक 6 है।

(iii) $x - y$ में x वाला पद x है। स्पष्टतः x का गुणांक 1 है।

●●●

प्रश्नावली 6.2

1. निम्नलिखित में से कौन-कौन से एकपदी, कौन-कौन से द्विपद और कौन-कौन से त्रिपद हैं?

   (i) $4x - 3y$ (ii) $x + y + z$ (iii) $a^2 + ab - ac$

   (iv) x^2 (v) 7 (vi) xy

   (vii) $4p^2q - 4q^2p + r$ (viii) $5x^2 - 2x + 4$ (ix) $x^2 + x$

   (x) $3abc$ (xi) $x + 5$ (xii) $yz - 1$

2. निम्नलिखित में से समान पद बताइए:

   $-xy^2, -7yx^2, -6x^2z^2, -18z^2x^2, 3x^2y, -5y^2x^2, 2xy^2, 6x^2y^2, -9x^2z^2$

3. निम्नलिखित व्यंजकों में y के गुणांक लिखिए:

   $-3xy, 4x - 3y, 7 - x + y, my, 17xyz$

4. निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक में x का गुणांक ज्ञात कीजिए:

   (i) $(2 - y)x$ (ii) $y^2x - y$ (iii) $7y^2 - 7xy$

   (iv) $3yz - 5xyz$ (v) $-8xy^2 + 5y$ (vi) $5xy + 2yz$

5. निम्नलिखित किस युग्म में असमान पद हैं?

   (i) $3x, -7x$ (ii) $11x, 11y$

   (iii) $14xy, -21xy$ (iv) $15ab, -4b$

6. निम्नलिखित में से समान व्यंजक छाँटिए:

   $$3(x^2 + y^2), 2x^3 - y^3, yz + 9, -y^3 + 2x^3, 3y^2 + 3x^2, 9 + bc$$

   शेष व्यंजकों को किसी अन्य रूप में लिखिए।

6.3 बीजीय व्यंजकों पर संक्रियाएँ

हम जानते हैं कि बीजीय व्यंजकों में कुछ समान तथा कुछ असमान पद हो सकते हैं। अत: बीजीय व्यंजकों का योग करने में हम समान पदों का योग करते हैं। इसी प्रकार, घटाने की क्रिया करते समय हम एक समान पद में से दूसरा समान पद घटाते हैं। प्रश्न यह उठता है कि समान पदों का योग करेंगे कैसे? उदाहरण के लिए, $3x$ और $7x$ को ले लें। माना कि हमें $3x + 7x$ का मान ज्ञात करना है। हम जानते हैं कि

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ या } a(b + c) = ab + ac$$

और $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ या $(b + c)\, a = ba + ca$

इस प्रकार, $3x + 7x = (3 + 7)\, x = 10x$

और इसी प्रकार, $8xy + 4xy = (8 + 4)\, xy$

$= 12xy$ आदि

अब माना कि $4y$ को $11y$ में से घटाना है। हम लिख सकते हैं कि

$$11y - 4y = (11 - 4)y = 7y$$

और इसी प्रकार,

$$18xy - 3xy + 6xy = (18 - 3 + 6)\, xy = 21xy$$

अतः समान पदों को जोड़ने या घटाने का नियम यह है:

दो या दो से अधिक समान पदों का योग इन्हीं के समान वह पद होता है जिसका संख्यात्मक गुणांक जोड़े जा रहे पदों के संख्यात्मक गुणांकों का योग हो।

इसी प्रकार,

दो समान पदों का अंतर इन्हीं के समान वह पद होता है जिसका संख्यात्मक गुणांक इन पदों के संख्यात्मक गुणांकों का अंतर हो।

उदाहरण 8: $3pq, - 2pq$ और $- 11pq$ को जोड़िए।

हल: योगफल इन्हीं के समान एक पद होगा जिसका संख्यात्मक गुणांक होगा:

$$3 - 2 - 11 = -10$$

अतः

$$3pq - 2pq - 11pq = -10pq$$

उदाहरण 9: $8ab^2$ में से $24ab^2$ को घटाइए।

हल: $8ab^2 - 24ab^2 = (8 - 24)ab^2 = -16ab^2$

उदाहरण 10: समान पदों को समूहित कर व्यंजक $- 7x^2 + 3x + x^2 - 8 - 5x + 9x^2 - 4$ को सरल कीजिए।

हल: पदों को आगे-पीछे कर, समान पदों का समूहन कर, हमें निम्न प्राप्त होता है:

$$- 7x^2 + x^2 + 9x^2 + 3x - 5x - 8 - 4$$

$$= (- 7 + 1 + 9)\, x^2 + (3 - 5)\, x - 12$$

$$= 3x^2 - 2x - 12$$

उदाहरण 11: व्यंजकों $3x + 4y - 5z$, $5y + 2x$, $7x - 8y$ और $4x - 9y - 5z$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल: व्यंजकों का योग ज्ञात करने के लिए, हमें इनके समान पदों को जोड़ना होगा। सुविधा की दृष्टि से व्यंजकों को ऊपर-नीचे इस प्रकार लिख लेंगे कि इनके समान पद एक स्तम्भ* (column) में, अर्थात् एक-दूसरे के ऊपर-नीचे हों जैसा नीचे दर्शाया गया है:

$$\begin{array}{r} 3x + 4y - 5z \\ + 2x + 5y \\ + 7x - 8y \\ + 4x - 9y - 5z \\ \hline 16x - 8y - 10z \\ \hline \end{array}$$

उदाहरण 12: $12xy - 5yz - 9zx$ को $15xy + 6yz + 7zx$ में से घटाइए।

हल: $15xy + 6yz + 7zx - (12xy - 5yz - 9zx)$

$$= 15xy + 6yz + 7zx - 12xy + 5yz + 9zx$$

$$= 15xy - 12xy + 6yz + 5yz + 7zx + 9zx$$

$$= 3xy + 11yz + 16zx$$

वैकल्पिक रूप से हम ऐसा भी कर सकते हैं:

(i) पहले वह व्यंजक लिखें जिसमें से दूसरे व्यंजक को घटाना है।

(ii) अब इसके नीचे दूसरा व्यंजक (जिसे घटाया जाना है) इस प्रकार लिखें कि दोनों व्यंजकों के समान पद एक ही स्तम्भ में (अर्थात् ऊपर नीचे) हों।

(iii) अब घटाए जाने वाले व्यंजक के प्रत्येक पद का चिह्न बदल कर पहले की भाँति जोड़ लें। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{array}{r} 15xy + 6yz + 7zx \\ 12xy - 5yz - 9zx \\ - \quad\quad + \quad\quad + \\ \hline 3xy + 11yz + 16zx \\ \hline \end{array}$$

*इस उद्देश्य को पूरा करने के लिए व्यंजक (व्यंजकों) के पदों का क्रम, आवश्यकता हो तो, बदला भी जा सकता है जैसे कि उदाहरण 11 के दूसरे व्यंजक में किया गया है।

उदाहरण 13 : $3x^2 - 8x + 11$, $-2x^2 + 12x$ और $-4x^2 + 17$ के योग में से $x^2 - x - 1$ को घटाइए।

हल: व्यंजकों को हम भिन्न-भिन्न पंक्तियों में इस प्रकार लिख लेंगे कि इनके समान पद एक ही स्तंभ में हों। साथ ही, अंतिम पंक्ति के व्यंजक (जिसे घटाया जाना है) के पदों के चिह्न भी बदल देंगे। ऐसा करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & -\ 8x & +\ 11 \\ -\ 2x^2 & +\ 12x & \\ -\ 4x^2 & & +\ 17 \\ x^2 & -\ x & -\ 1 \\ - & + & + \\ \hline -\ 4x^2 & +\ 5x & +\ 29 \end{array}$$

वैकल्पिक विधि **:** पहले तीन व्यंजकों का योग कर, योगफल में से चौथा व्यंजक घटा देंगे।

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & -\ 8x & +\ 11 \\ -\ 2x^2 & +\ 12x & \\ -\ 4x^2 & + & 17 \\ \hline -\ 3x^2 & +\ 4x & +\ 28 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} -\ 3x^2 & +\ 4x & +\ 28 \\ x^2 & -\ x & -\ 1 \\ - & + & + \\ \hline -\ 4x^2 & +\ 5x & +\ 29 \end{array}$$

● ● ●

प्रश्नावली 6.3

1. एकपदियों $2xy, 8xy, -5xy, xy$ का योग ज्ञात कीजिए।
2. योग ज्ञात कीजिए:
   (i) $a + b - c, b + c - a, c + a - b$ का।
   (ii) $-abc, 13abc, 5abc$ का।
   (iii) $3x + 4y - 15z, 6x + 7y, 12y - 7z - 9x$ का।
   (iv) $15a + 11b - 13c - 17, 18 - 12c - 7b - 3a$ का।

(v) $x - 8xy,\ 3xy - y,\ y + 1$ का।

(vi) $6x - 3y,\ 3y - 5x + 3z,\ -x + 2y - 3z$ का।

3. निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए:

(i) $y^3,\ -2y^3,\ -3y^3,\ 4y^3$

(ii) $7x^2y,\ -3x^2y,\ 14x^2y$

(iii) $x^2 - y^2 - z^2,\ y^2 - z^2 - x^2,\ z^2 - x^2 - y^2$

(iv) $x^2y - 3x + 4,\ -8x^2y + 3x - 4$

(v) $13x^2,\ 10x^2,\ -5x^2,\ 4x^2$

4. समान पदों का समूहन कर, सरल कीजिए:

(i) $12b - 7b - 3b$

(ii) $x^2 + 4x^2 - 8x^2 + 11x^2$

(iii) $2a - (b - a) - b - (a - b)$

(iv) $2b - 7a + 8a - 5b + 3c - c$

(v) $10m^2 - 9m + 7m - 3m^2 - 5m - 8$

(vi) $2b - a - b - 2c - b + a - (a - b - c)$

(vii) $(x^2 + 3x - 2) - (4x - 2x^2 - 2)$

(viii) $xy^2 - y^2 + x^2 + xy^2 - 4y^2 - x^2 - 7$

5. पहले व्यंजक को दूसरे व्यंजक में से घटाइए:

(i) $18y^2,\ 3y^2$

(ii) $6ab,\ -12ab$

(iii) $17a^2,\ 23a^2$

(iv) $a + b - c,\ -a - b - c$

(v) $x^2 - y^2x + z,\ y^2x - x^2 - z$

(vi) $3abc - a^2 - b^2,\ c^2 + 2a^2 - b^2 + abc$

(vii) $x^2 - 3xy - 2y^2,\ 2x^2 + 4xy - 5y^2$

(viii) $-m^2 + 3mn,\ 3m^2 - 3mn + 8$

(ix) $-2x + 1,\ -2x^2 + 4x + 10$

6. $2a^2 + 3b^2,\ 5a^2 - 2b^2 + ab$ और $-6a^2 - 5ab + b^2$ का योग ज्ञात कीजिए।

7. $5xy - 4x^2 + 3y^2$ को $3x^2 - 5y^2 - 4xy$ में से घटाइए।

8. $3a - 5b + 3c$ और $2a + 4b - 5c$ के योग में से $4a - b - c + 3$ को घटाइए।

9. $x^2 + xy + y^2$ में क्या जोड़ें कि $2x^2 + 3xy$ प्राप्त हो?

10. $-13x + 5y - 8a$ में से क्या घटाएँ कि $11x - 16y + 7a$ प्राप्त हो?

11. $2x^2 + 3xy, - x^2 - xy - y^2$ और $xy + 2y^2$ के योग में से $3x^2 - y^2$ और $-x^2 + xy + y^2$ के योग को घटाइए।

12. $13m - 11n + 9p$ और $-7p + 3m - 5n$ के योग को $6m - 7n - 5p, -4m + 6p - 9n$ और $5m - 4n + 3p$ के योग में से घटाइए।

13. $3x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ में क्या जोड़ें कि $x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ प्राप्त हो?

14. $3x - y + z$ और $-y - z$ के योग में से $3x - y - z$ को घटाइए। परिणाम में x का गुणांक क्या है?

15. दो व्यंजकों का योग $x^2 - y^2 - 2xy + y - 7$ है। यदि इनमें से एक व्यंजक $2x^2 + 3y^2 - 7y + 1$ हो, तो दूसरा व्यंजक ज्ञात कीजिए।

16. $2x^2 - xy - 5y^2$ को $-5x^2 - 3xy - 2y^2$ बनाने के लिए, इसमें से क्या घटाया जाए ?

17. $3p - 2q + 2r, 5p + 3q - 2r$ और $-4p + 2q - 3r$ के योग को $2p - 3q - 3r$, $4p - q - r$ और $3p - 2q - 3r$ के योग में से घटाइए।

18. यदि $A = 3x^2 - 7x + 8$, $B = x^2 + 8x - 3$ और $C = -5x^2 - 3x + 2$ हो, तो $B - C - A$ का मान ज्ञात कीजिए।

19. यदि $a = x - 2$, $b = y + 2$ और $c = -x + 2y$ हो, तो दर्शाइए कि $a + b + c = 3y$ होगा।

6.4 बीजीय व्यंजकों का मान ज्ञात करना

जैसा कि पहले बताया जा चुका है, अक्षर–संख्याएँ मात्र संख्याओं को ही व्यक्त करती हैं। इस प्रकार व्यंजक $2a + 2b$ दिया होने पर यदि हमें a और b का मान ज्ञात है, तो हम इस व्यंजक के (संख्यात्मक) मान को ज्ञात कर सकते हैं। यदि इस व्यंजक में $a = 10$ और $b = 6$ हो, तो इसका मान $2(10) + 2(6) = 20 + 12 = 32$ होगा। अक्षर–संख्याओं के स्थान पर संख्यात्मक मान रखने को ***प्रतिस्थापन*** (*substitution*) कहते हैं।

उदाहरण 14: यदि $y = -2$ हो, तो $2y^3 - 3y^2 + y - 1$ का मान निकालिए।

हल : दिए गए व्यंजक में $y = -2$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$2(-2)^3 - 3(-2)^2 + (-2) - 1$$
$$= 2(-8) - 3(4) - 2 - 1$$
$$= -16 - 12 - 2 - 1$$
$$= -31$$

अत: $y = -2$ होने पर, दिए हुए व्यंजक का मान -31 है।

उदाहरण 15: यदि $a = 2, b = 3, c = 1$ हो, तो $a^2 + 2(b^2 + c^2)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिए हुए व्यंजक में a, b, c के मान रखने पर,

$$a^2 + 2(b^2 + c^2) = 2^2 + 2(3^2 + 1^2)$$
$$= 4 + 2(9 + 1) = 24$$

अत: जब $a = 2, b = 3$ और $c = 1$ हो, तो दिए हुए व्यंजक का मान 24 होगा।

●●●

प्रश्नावली 6.4

1. यदि $x = 1$ और $y = 2$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए:
   (i) $x + y$ (ii) $x + 4$ (iii) $y - 10$
   (iv) $x - 3y + 2$ (v) $-4x + 5y - 7$ (vi) $2x - y - 3$

2. यदि $x = 0$ और $y = -1$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए:
   (i) $x^2 - y + 2$ (ii) $x + y + 8$ (iii) $x^2 + y^2$
   (iv) $x^2 y^2$ (v) $xy^2 - x^2y + x$ (vi) $x^2 - 2y^2 - 5$

3. यदि $a = 1$, $b = 0$ और $c = -1$ हो, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए:
   (i) $c^2 - 2ab(b - a)$ (ii) $(a^2 - 3ac + a - 3)(b - a - b^2 - 2ab)$

4. यदि $x = 1$, $y = 2$ और $z = -1$ हो, तो निम्नलिखित में से प्रत्येक व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए:
   (i) $x^2 - y^2$ (ii) $z^2 - x^2$ (iii) $xy + yz - 2$
   (iv) $2xy^2 - 3x^2y + z^2$ (v) $y^2 - z^2 + x^2$ (vi) $4x^2 + 2y^2$
   (vii) $(z + x)^2 - 2y$ (viii) $(x^2 - y^2)(3y - 2z)$

5. यदि $a = 18, b = 10$ और $c = 6$ हो, तो $a\,b\,c$ का मान क्या होगा?

6. यदि $C = 35$ हो, तो $\frac{9}{5}\,C + 32$ का मान निकालिए।

7. यदि $x = -1,\ y = -2$ और $z = 3$ हो, तो $x^2 - yz - zx$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. $4x + x - 2x^2 + x - 1$ का मान क्या होगा, यदि $x = -1$ हो?

याद रखने योग्य बातें

1. संख्याओं को व्यक्त करने वाले अक्षर, ***अक्षर-संख्याएँ*** कहलाती हैं।
2. अक्षर-संख्याएँ स्वयं, तथा अक्षर-संख्याएँ और संख्याओं के समूह, जोड़, घटा, गुणा तथा भाग के उन सभी नियमों का पालन करते हैं जो संख्याओं के लिए सत्य हैं। साथ ही, इनके लिए इन संक्रियाओं (+, −, ×, ÷) के सभी गुण भी सत्य होते हैं।
3. एक या अनेक संख्याओं का समूह (जिनमें अक्षर-संख्याएँ भी सम्मिलित हैं) जिसमें मूलभूत संक्रियाओं के चिह्न या संकेत प्रयुक्त हों, ***बीजीय व्यंजक*** कहलाता है।
4. + या − के एक या अनेक चिह्न बीजीय व्यंजक को कई भागों में बाँट देते हैं। अपने चिह्न के साथ प्रत्येक भाग व्यंजक का एक **पद** कहलाता है।
5. व्यंजक में एक पद होने पर वह ***एकपदी***, दो पद होने पर ***द्विपद*** और तीन पद होने पर ***त्रिपद*** कहलाता है।
6. एक जैसे अक्षरीय गुणनखंडों वाले पद ***समान*** पद कहलाते हैं। अन्यथा इन्हें ***असमान*** पद कहते हैं।
7. दो समान पदों का योग (या अन्तर) इन्हीं के समान एक पद होता है जिसका संख्यात्मक गुणांक इन दो पदों के संख्यात्मक गुणांकों का योग (या अंतर) होता है।
8. बीजीय व्यंजकों को जोड़ने या घटाने के लिए हम समान पदों का समूहन कर, समान पदों के प्रत्येक समूह को जोड़ या घटा लेते हैं।

एक चर वाले रैखिक समीकरण

अध्याय 7

7.1 भूमिका

इस अध्याय में हम यह सीखेंगे कि एक समीकरण से क्या तात्पर्य होता है। हम एक चर वाले रैखिक समीकरण का हल प्रयत्न और भूल (trial and error) विधि से निकालना सीखेंगे। साथ ही, हम हल ज्ञात करने की एक ऐसी विधि भी सीखेंगे जिसमें योग, घटा, गुणा और भाग के नियमों का प्रयोग किया जाता है।

7.2 रैखिक समीकरण

पिछले अध्यायों में हमें इस प्रकार के कथन देखने को मिले थे:

$$3 + 2 = 5 \quad (1)$$

$$4 \times (5 + 6) = 4 \times 5 + 4 \times 6 \quad (2)$$

$$5 \times (6 - 7) = 5 \times 6 - 5 \times 7 \quad (3)$$

अब निम्नलिखित कथनों पर ध्यान दीजिए:

(i) 4 से x अधिक संख्या 9 है।

(ii) संख्या x से 7 कम संख्या 6 है।

(iii) संख्या x का 9 गुना 12 है।

(iv) संख्या y को 6 से भाग देने पर 2 प्राप्त होता है।

(v) दो संख्याओं x और y का योग 7 है।

(vi) एक अक्षर-संख्या x का स्वयं से गुणनफल 36 है।

स्पष्ट है कि ऊपर दिए गए कथनों (i) - (vi) को क्रमशः नीचे दिखाए अनुसार लिखा जा सकता है:

$$4 + x = 9 \quad (4)$$

$$x - 7 = 6 \quad (5)$$

$$9x = 12 \quad (6)$$

$$\frac{y}{6} = 2 \qquad (7)$$

$$x + y = 7 \qquad (8)$$

$$x^2 = 36 \qquad (9)$$

हमने देखा कि संकेत '=' (समता चिह्न या बराबर का चिह्न है।) कथन (1) से (9) तक, सभी में आता है। ऐसा कथन जिसमें संकेत '=' आता है, *समता का कथन* या केवल ***समिका (equality)*** कहलाता है।

इस प्रकार, (1) से (9) तक के सभी कथन समिका हुए। ध्यान दीजिए कि कथनों (1), (2) और (3) में कोई अक्षर-संख्या (चर) नहीं आती जबकि कथनों (4) से (9) में एक या दो अक्षर-संख्याएँ आती हैं। समता का **ऐसा कथन जिसमें एक या अधिक अक्षर-संख्याएँ आ रही हों, *समीकरण* (*equation*) कहलाता है।** अत: (4) से (9) तक की सभी समिकाएँ वास्तव में समीकरण हैं। यह भी देखिए कि प्रत्येक समीकरण के दो ***पक्ष (sides)*** होते हैं: वाम (बायाँ) पक्ष (LHS) तथा दक्षिण (दायाँ) पक्ष (RHS)। इस प्रकार समीकरण (4) में $(4 + x)$ तो वाम पक्ष या (LHS) है और 9 दायाँ पक्ष या (RHS) है। समीकरण (7) में, $\frac{y}{6}$ LHS (Left Hand Side)है और 2 RHS (Right Hand Side) है।

समीकरण में आने वाली अक्षर-संख्याओं को **चर** *(variables)* या *अज्ञात (unknowns)* कहते हैं। प्राय: चरों को अंग्रेजी वर्णमाला के आखिर के अक्षरों से, जैसे कि x, y, z, u, v, w आदि से व्यक्त करते हैं।

समीकरणों (4) से (8) तक प्रत्येक में चर की अधिकतम घात एक है। ऐसे समीकरण जिनमें चरों की अधिकतम घात एक हो, ***रैखिक समीकरण*** कहलाते हैं। अत: (4) से (8) तक का प्रत्येक समीकरण एक रैखिक समीकरण हुआ। किन्तु एक अंतर पर ध्यान दीजिए। समीकरण (4) से (7) तक एक चर वाले रैखिक समीकरण हैं जबकि समीकरण (8) दो चरों वाला रैखिक समीकरण है। समीकरण (9) तो रैखिक समीकरण है ही नहीं।

7.3 प्रयत्न और भूल विधि से समीकरणों का हल

निम्नलिखित समीकरण को लीजिए:

$$x - 8 = -4 \qquad (1)$$

इस समीकरण (1) का वाम पक्ष या LHS, $x - 8$ और इसका दायाँ पक्ष या

RHS, – 4 है। अब x के कुछ मानों के लिए एक-एक करके (1) के वाम पक्ष के मान निकालेंगे। यह प्रक्रिया तब रोकेंगे जब x का ऐसा मान मिल जाए जिसके लिए (1) का वाम पक्ष या LHS उसके दाएँ पक्ष या RHS के बराबर हो जाए।

x	वाम पक्ष/LHS	दायाँ पक्ष/RHS
0	– 8	– 4
1	– 7	– 4
2	– 6	– 4
3	– 5	– 4
4	– 4	– 4

हमने देखा कि समीकरण (1) के वाम पक्ष और दाएँ पक्ष केवल $x = 4$ के लिए ही बराबर होते हैं। x के सभी अन्य मानों के लिए (1) के दोनों पक्ष बराबर नहीं है।

अज्ञात का वह मान जिसके लिए समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हो जाएँ (LHS = RHS), समीकरण का ***हल** (solution)* **या** ***मूल** (root)* कहलाता है। हम यह भी कहते हैं कि यह मान समीकरण को ***संतुष्ट** (satisfies)* करता है। अत: $x = 4$ समीकरण (1) का हल या मूल है।

उदाहरण 1: प्रयत्न और भूल विधि से निम्नलिखित समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$z - 1 = -3 + 2z$$

हल: हम z के कुछ मान एक-एक करके लेंगे तथा समीकरण के वाम पक्ष (LHS) और दाएँ पक्ष (RHS) के मान निकालेंगे। यह प्रक्रिया तब रोकेंगे जब z के किसी विशेष मान के लिए बायाँ (वाम) पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाएँ।

z	वाम पक्ष	दायाँ पक्ष
0	–1	– 3
1	0	– 1
– 1	– 2	– 5
– 2	– 3	– 7
2	1	1

$\therefore$ $z = 2$ दिए हुए समीकरण का हल है।

●●●

प्रश्नावली 7.1

1. प्रयत्न और भूल विधि से चर (x, y, z या m) का ऐसा मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए LHS = RHS हो जाए:

   (i) $x + 7 = 12$ (ii) $x - 15 = 20$ (iii) $19 = 7 + z$ (iv) $\frac{x}{8} = 9$

   (v) $y - 2 = 2$ (vi) $2m = 6$ (vii) $2x = 9 - x$

2. निम्नलिखित समीकरणों का हल प्रयत्न एवं भूल विधि से ज्ञात कीजिए:

   (i) $5x = 30$ (ii) $14 - y = 8$ (iii) $x - 2 = -6$

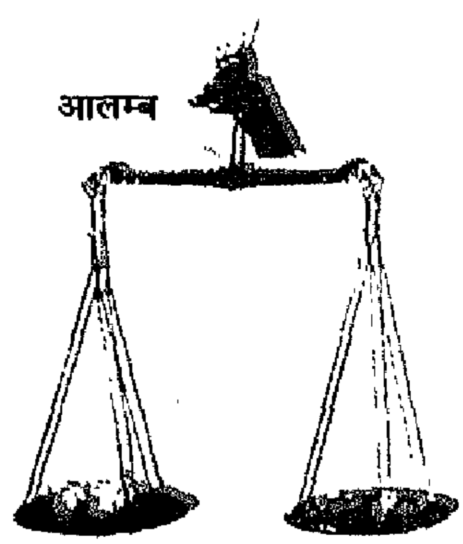
   (iv) $\frac{1}{3}x + 8 = 11$ (v) $3y + 4 = 5y - 4$ (vi) $x + 8 = 13$

   (vii) $10 - x = 6$ (viii) $y + 3 = 7$ (ix) $z - 1 = -3$

7.4 समीकरण को हल करना

हमने प्रयत्न और भूल विधि से समीकरणों को हल करना सीखा। हमने देखा कि इसमें बहुत समय लग सकता है और यह कोई निश्चित विधि नहीं है। इसलिए आइए समीकरणों को हल करने की एक अच्छी विधि निकालें।

किसी समीकरण की तुलना एक तराजू से की जा सकती है। समीकरण के दो पक्षों को तराजू के दो पलड़े माना जा सकता है। समता चिह्न '=' बताता है कि पलड़े संतुलन में हैं (या कहिए कि तराजू के दोनों पलड़ों में बराबर भार है और उसकी डंडी क्षैतिज है) (देखिए आकृति 7.1)।



आकृति 7.1

आपने देखा ही होगा कि तराजू कैसे काम करती है। संतुलन की दशा में यदि दोनों पलड़ों में समान भार डाल दें, तो पलड़े संतुलन में बने रहते हैं। इसी प्रकार, यदि दोनों पलड़ों में से समान भार हटा लें, तो भी पलड़े संतुलन में बने रहते हैं। इस प्रकार, दोनों पलड़ों में हम चाहे समान भार डालें या हटाएँ , तराजू का संतुलन बिगड़ता नहीं है।

इसी प्रकार, समीकरण के सन्दर्भ में, *समता चिह्न (=) को प्रभावित किए बिना, हम*

I. समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ सकते हैं।

उदाहरणतः यदि $x+2=5$, तो $x+2+3=5+3$ होगा।

II. समीकरण के दोनों पक्षों से वही संख्या घटा सकते हैं।

उदाहरणतः यदि $x+2=6$ है, तो $x+2-1=6-1$ होगा।

क्योंकि गुणा को बार-बार योग और भाग की क्रिया को बार-बार घटाने के रूप में देखा जा सकता है, अतः हमें ये नियम भी प्राप्त होते हैं:

समीकरण के समता चिह्न (=) को प्रभावित किए बिना, हम

III. समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही संख्या $(\neq 0)$ से गुणा कर सकते हैं।

जैसे कि यदि $\frac{x}{6}=5$ हो, तो $\frac{x}{6}\times 12=5\times 12$ होगा।

IV. समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही संख्या $(\neq 0)$ से भाग दे सकते हैं। जैसे कि

यदि $5x=12$ हो, तो $5x \div 5 = 12 \div 5$ होगा।

अब ऊपर बताए गए नियमों का प्रयोग कर, कुछ समीकरणों को हल किया जाएगा।

उदाहरण 2: $x-3=11$ को हल कीजिए।

हल: दिए हुए समीकरण में से x का मान निकालने के लिए दोनों पक्षों में 3 जोड़ेंगे (नियम I)। इस प्रकार,

$$x-3+3=11+3$$

या

$$x=14$$

जाँच: आइए, दिए गए समीकरण में $x=14$ रखकर देखें। $x=14$ के लिए,

LHS = 14 − 3 = 11, RHS = 11 (है ही!)

अतः $x=14$ के लिए LHS = RHS है।

अतः $x=14$, दिए हुए समीकरण का मूल या हल है।

उदाहरण 3: $2y = y + 3$ को हल कीजिए।

हल: दोनों पक्षों में से y घटाने पर (नियम II), हमें प्राप्त होता है:

$$2y - y = y + 3 - y$$

या $$y = 3$$

जाँच **:** चलिए, दिए गए समीकरण में $y = 3$ प्रतिस्थापित करते हैं। ऐसा करने पर,

$$\text{LHS} = 2 \times 3 = 6, \qquad \text{RHS} = 3 + 3 = 6$$

अर्थात् $y = 3$ के लिए, LHS = RHS है।

अतः $y = 3$, दिए गए समीकरण का हल है।

उदाहरण 4 : समीकरण $\frac{y}{12} = 48$ को हल कीजिए।

हल : समीकरण के दोनों पक्षों को 12 से गुणा करने पर (नियम III), हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{y}{12} \times 12 = 48 \times 12$$

या $$y = 576$$

अतः $y = 576$ दिए गए समीकरण का हल है।

जाँच **:** दिए गए समीकरण में $y = 576$ रखने पर,

$$\text{LHS} = \frac{576}{12} = 48$$ है तथा RHS = 48 (है ही!)

अर्थात् LHS = RHS

उदाहरण 5: समीकरण $15x = 45$ को हल कीजिए।

हल: समीकरण के दोनों पक्षों को 15 से भाग देने पर (नियम IV), हमें निम्न प्राप्त होता है:

$$\frac{15x}{15}=\frac{45}{15}$$

या $$x = 3$$

इस प्रकार, $x = 3$ वाँछित हल है।

उदाहरण 6: समीकरण $11x + 2 = -20$ को हल कीजिए।

हल : समीकरण के दोनों पक्षों में से 2 घटाने पर (नियम II),

$$11x + 2 - 2 = -20 - 2$$

या $$11x + 0 = -22$$

या $$11x = -22$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों को 11 से भाग देने पर (नियम IV),

$$11x \div 11 = -22 \div 11$$

या $$x = -2$$

अत: $x = -2$ वाँछित हल है।

जाँच : दिए गए समीकरण में $x = -2$ रखने पर,

$$\text{LHS} = 11(-2) + 2 = -22 + 2 = -20, \text{RHS} = -20$$

अत: $x = -2$ के लिए LHS = RHS

उदाहरण 7: समीकरण $2x-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ को हल कीजिए।

हल: समीकरण के दोनों पक्षों में $\frac{1}{2}$ जोड़ने पर,

$$2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}$$

या $$2x = 4$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों को 2 से भाग देने पर,

$$2x \div 2 = 4 \div 2$$

या $$x = 2$$

अत: $x = 2$ वाँछित हल है।

उदाहरण 8: समीकरण $3x - 4 = 4 - (8 + 3x)$ को हल कीजिए।

हल : $3x - 4 = 4 - (8 + 3x) = 4 - 8 - 3x$

या $3x - 4 = -4 - 3x$

इस समीकरण के दोनों पक्षों में 4 जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$3x = -3x$$

दोनों पक्षों में $3x$ जोड़ने पर,

$$6x = 0$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों को 6 से भाग देने पर,

$$\frac{6x}{6} = \frac{0}{6}$$

या $x = 0$

अतः समीकरण का हल $x = 0$ है।

●●●

प्रश्नावली 7.2

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए:

(i) $x - 7 = -15$	(ii) $x - 7 = 4$	(iii) $x - 12 = -5$
(iv) $11x - 2 = 20$	(v) $8y - 16 = 0$	(vi) $6y - 5 = 19$
(vii) $5y - 3 = 3y - 5$	(viii) $12 - x = 6$	(ix) $y + 4 = 8$
(x) $x + 5 = 9$	(xi) $3x + 4 = 19$	(xii) $3x + 8 = 5x + 2$
(xiii) $7 + 4y = -5$	(xiv) $12x + 12 = 72$	(xv) $5y + 10 = 4y - 10$
(xvi) $\frac{m}{12} = 9$	(xvii) $\frac{x}{6} = 7$	(xviii) $\frac{y}{9} = 8$
(xix) $\frac{x}{5} = 15$	(xx) $\frac{x}{12} = 4$	(xxi) $3z = 48$
(xxii) $5x = 30$	(xxiii) $8x = 56$	(xxiv) $9x = 81$
(xxv) $15x = 225$	(xxvi) $-7x = 14$	(xxvii) $17u = 255$

2. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए:

(i) $\frac{7u+3}{2}=19$ (ii) $\frac{x+8}{4}=2$ (iii) $\frac{x}{7}-2=5$

(iv) $\frac{y}{3}-7=2$ (v) $\frac{x-5}{4}=7$ (vi) $12y-3=5(2y+1)$

(vii) $10(2-x)=4(x-9)$

याद रखने योग्य बातें

1. समता के जिस कथन में एक या अधिक अक्षर-संख्याएँ हों, उसे ***समीकरण*** कहते हैं।

2. जिस समीकरण में एक ही अक्षर-संख्या हो और इस अक्षर-संख्या की अधिकतम घात 1 हो, उसे *एक चर वाला* ***रैखिक समीकरण*** कहते हैं।

3. समीकरण हल करते समय निम्नलिखित संक्रियाएँ की जा सकती हैं और इनसे समीकरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता:
   - (i) समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ना।
   - (ii) समीकरण के दोनों पक्षों में से एक ही संख्या घटाना।
   - (iii) समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही संख्या ($\neq 0$) से गुणा करना।
   - (iv) समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही संख्या ($\neq 0$) से विभाजित करना।

—— अतीत के झरोखे से ——

बीजगणित अर्थात् *algebra* शब्द *Aljebar w'al almuqabalah* नामक पुस्तक के शीर्षक से निकला है। यह पुस्तक लगभग 825 ई में बगदाद निवासी एक अरब गणितज्ञ ***मोहम्मद इब्न अल ख्वारिज्मी*** ने लिखी थी। इतिहास के पन्नों को पलटने पर ज्ञात होता है कि संख्याओं को संकेतों से व्यक्त करने का श्रेय एक प्राचीन ग्रंथ *एहम्स पेपाइरस (Ahmes Papyrus)* को जाता है। यह भोजपत्र ईसा से लगभग 1550 वर्ष पूर्व लिखा गया था। इसमें अज्ञात संख्या को **ढेरी** अर्थ वाले शब्द *hau (हायू)* से व्यक्त किया गया था।

प्राचीन भारतीय गणितज्ञों ने अज्ञात राशियों को व्यक्त करने के लिए संकेतों का भरपूर प्रयोग किया। उन्होंने अज्ञात को भाँति-भाँति के नाम दिए, जैसे कि ***यावत्-तावत्*** (अर्थात् जितना-उतना) या ***वर्ण*** या ***बीज*** । इन्होंने अज्ञात को व्यक्त करने के लिए विभिन्न रंगों के पहले अक्षरों का (काले से), पी (पीले से), नी (नीले से) आदि का भी प्रयोग किया। इन अक्षरों का प्रयोग तथा इन पर घातांक लगाने की विधि ईसा से 300 वर्ष पूर्व भारत में सामान्य सी बात थी।

महान भारतीय गणितज्ञों ***आर्यभट्ट*** (जन्म 476 ई), ***ब्रह्मगुप्त*** (जन्म 598 ई), ***महावीर*** (850 ई के आस-पास), ***श्रीधर*** (लगभग 1025 ई) तथा ***भास्कर II*** (जन्म 1114 ई) ने बीजगणित के अध्ययन में बहुत योगदान दिया। उदाहरण के लिए ***भास्कर II*** की प्रसिद्ध पुस्तक ***लीलावती*** से एक प्रश्न नीचे दिया जा रहा है:

मधुमक्खियों के एक झुंड में से पाँचवाँ हिस्सा तो कदम्ब के फूलों पर बैठ गया, तीसरा भाग सिलिंध्री के फूलों पर जा बैठा। इनके अंतर का तीन गुना भाग कुटज के फूलों की ओर उड़ गया। शेष एक मधुमक्खी चमेली और केवड़े की सुगंध से मोहित होकर हवा में इधर-उधर तिरने लगी। हे मोहिनी! मधुमक्खियों की कुल संख्या बताओ।

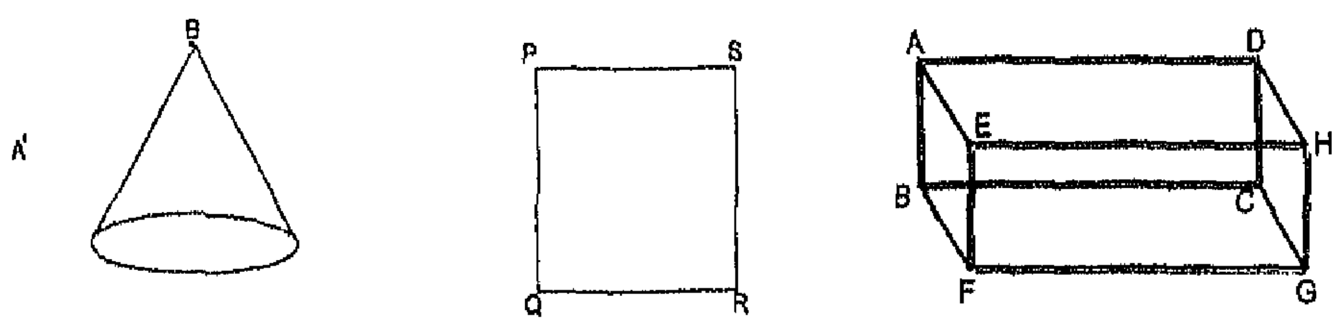
आधारभूत ज्यामितीय संकल्पनाएँ

अध्याय 8

8.1 भूमिका

बिन्दु, रेखा, तल जैसे शब्द आपके लिए नए नहीं हैं। ये सभी ज्यामिति के आधार स्तंभ हैं। इस अध्याय में हम देखेंगे कि किस प्रकार इन आधार स्तंभों की जानकारी से ज्यामिति को अच्छी तरह से समझा जा सकता है।

एक नुकीली पेंसिल से एक कागज पर एक सूक्ष्म चिह्न लगाइए। शंकु के नुकीले सिरे को देखिए। किसी वर्ग या घनाभ के शीर्षों को देखिए। ये सभी उदाहरण हमें एक *बिन्दु* (*point*) की कल्पना करने में सहायक हैं। वास्तव में, इनमें से कोई भी गणितीय दृष्टि के अनुसार 'बिन्दु' नहीं हैं। ये सभी बिन्दु के भौतिक या दृष्टिगत हो सकने वाले स्वरूप को दर्शाते हैं (आकृति 8.1)।



शंकु वर्ग घनाभ

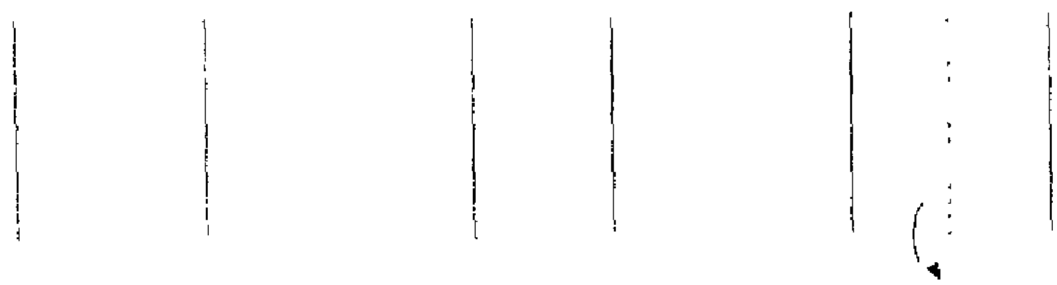
आकृति 8.1

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि ***बिन्दु की एक निश्चित स्थिति होती है। इसकी कोई लम्बाई, चौड़ाई अथवा मोटाई नहीं होती।***

एक बिन्दु को प्रायः अंग्रेजी वर्णमाला के एक बड़े अक्षर जैसे A, B, P, H, इत्यादि से व्यक्त करते हैं (आकृति 8.1) और इसे बिन्दु A, बिन्दु B, इत्यादि पढ़ते हैं।

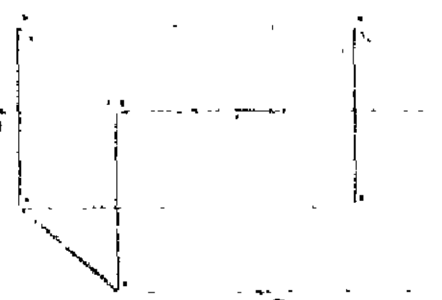
8.2 रेखा

एक कागज को मोड़ कर दबाइए। इसको खोलने पर हम देखते हैं कि एक सीधा मोड़ का निशान कागज पर बन गया है (आकृति 8.2)। कागज पर बना यह सीधा मोड़ का निशान *रेखा (line)* के एक भाग की संकल्पना का एक उदाहरण है।



आकृति 8.2

एक घनाभ के किनारों (कोरों) को देखिए (आकृति 8.3)। प्रत्येक किनारा (edge) रेखा के एक भाग का उदाहरण है। एक पूर्ण रेखा की संकल्पना के लिए हमें यह कल्पना करनी होगी कि यह किनारा अपरिमित रूप से दोनों दिशाओं में बढ़ाया गया है।



आकृति 8.3

इस प्रकार, ***रेखा की आधारभूत संकल्पना है इसका सीधा होना तथा उसका अपरिमित रूप से दोनों दिशाओं में विस्तृत होना। इसकी केवल लम्बाई होती है। इसकी कोई चौड़ाई या मोटाई नहीं होती।***

ज्यामिति में रेखा का अभिप्राय सम्पूर्ण रेखा से होता है न कि उसके किसी एक भाग से। स्पष्ट है कि हम रेखा को न तो किसी कागज पर बना सकते हैं और न ही दिखा सकते हैं। इसलिए हम कागज पर रेखा का एक भाग ही खींचते हैं और उसके दोनों सिरों पर तीर के निशान अंकित कर देते हैं, जैसा कि आकृति 8.4 में दर्शाया गया है।



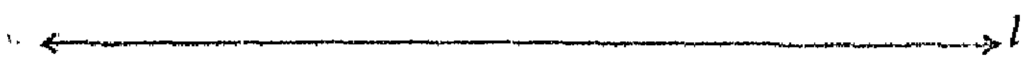
आकृति 8.4

दोनों तीर के निशान इस बात को इंगित करते हैं कि रेखा दोनों दिशाओं में असीमित दूरी तक बढ़ाई गई है। इस प्रकार, ***रेखा के कोई अन्त बिन्दु नहीं होते।***

जिस प्रकार हम बिन्दु को दर्शाने के लिए एक अत्यंत सूक्ष्म चिह्न का प्रयोग करते हैं, उसी प्रकार रेखा को दर्शाने के लिए आकृति 8.4 जैसी आकृति का प्रयोग करते हैं।

एक रेखा को नामांकित करने की दो विधियाँ हैं :

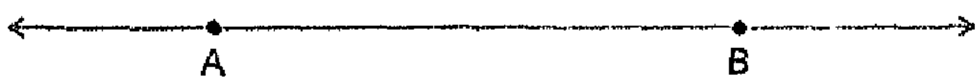
(i) अंग्रेजी वर्णमाला के किसी छोटे अक्षर जैसे l, m, p इत्यादि को रेखा के एक ओर लिख दिया जाता है, जैसा आकृति 8.5 में दर्शाया गया है।



आकृति 8.5

इस प्रकार रेखा को 'रेखा l', 'रेखा m' आदि पढ़ा जाता है।

(ii) आकृति 8.6 के समान रेखा पर दो बिन्दु A व B का चयन कर रेखा को AB अथवा BA से प्रदर्शित करते हैं। इसे 'रेखा AB' पढ़ते हैं।



आकृति 8.6

हम कहते हैं कि ***'बिन्दु A (तथा बिन्दु B) रेखा पर स्थित हैं।'*** हम यह भी कहते हैं कि ***'रेखा बिन्दु A (या बिन्दु B) से होकर जाती है।'*** रेखा का वह भाग जो बिन्दु A से बिन्दु B तक है *रेखाखंड* कहलाता है।

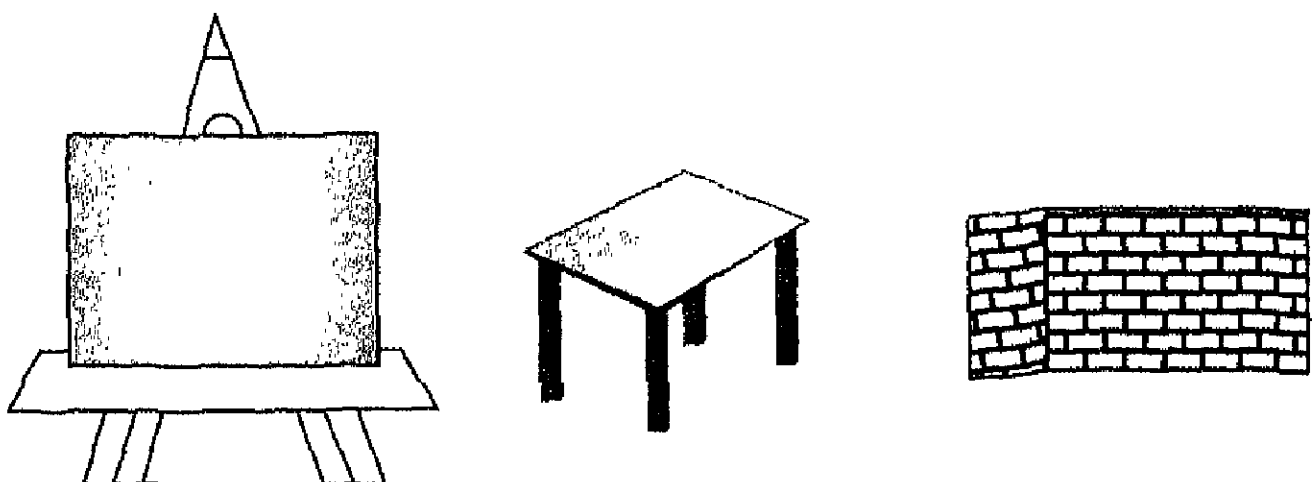
किसी रेखा पर स्थित दो बिन्दुओं A व B के बीच हम एक तीसरा बिन्दु C जैसा कि आकृति 8.7 में दिखाया गया है, प्राप्त कर सकते हैं। यह काम हम सदैव कर सकते हैं तथा बार-बार कर सकते हैं। इस प्रकार दो बिन्दुओं के बीच तीसरा बिन्दु प्राप्त करने की प्रक्रिया का कोई अन्त नहीं है। इसे जब तक चाहें और जितनी बार चाहें दोहराते रह सकते हैं। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि *रेखा पर अपरिमित (असंख्य) बिन्दु होते हैं।* यहाँ 'अपरिमित (असंख्य) बिन्दु' होने का अर्थ है कि यदि एक बड़ी से बड़ी संख्या की कल्पना करें, तो रेखा में उस संख्या से भी अधिक बिन्दु होते हैं।



आकृति 8.7

8.3 तल

क्या आपने अपनी कक्षा की दीवारों, कक्षा में रखी मेज, कक्षा में लगे श्यामपट्ट को ध्यान से देखा है? ये सभी पृष्ठ (surfaces) सपाट हैं। ये सपाट पृष्ठ ***तल** (plane)* (के एक भाग) की संकल्पना के सटीक उदाहरण हैं (आकृति 8.8)।



आकृति 8.8

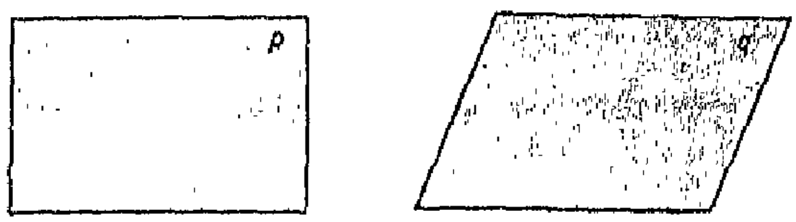
संपूर्ण तल की संकल्पना के लिए इस प्रकार के पृष्ठों के बारे में यह कल्पना करनी होगी कि ये सभी दिशाओं में ***अपरिमित रूप*** से विस्तृत हैं। इस प्रकार, हम सोच सकते हैं कि ***तल एक ऐसा सपाट पृष्ठ है जो सभी दिशाओं में अपरिमित रूप से विस्तृत है। तल की लम्बाई होती है, चौड़ाई होती है परन्तु कोई मोटाई नहीं होती।***

पहले के समान ही, यहाँ ***अपरिमित (अथवा असीमित)*** विस्तार का अर्थ यही है कि हम तल ***को कितना भी विस्तार दे दें इस के बाद भी विस्तार की संभावना बनी रहती है।*** ज्यामिति में तल से हमारा अभिप्राय इसी संपूर्ण तल से होता है, तल के किसी भाग से नहीं। स्पष्ट है कि संपूर्ण तल को किसी कागज पर बनाना अथवा दिखाना संभव नहीं है। अतः जिस प्रकार रेखा को दिखाने के लिए हम इसके एक भाग का प्रयोग करते हैं, उसी प्रकार तल को प्रदर्शित करने के लिए हम तल के एक भाग का प्रयोग करते हैं। समान्यतः तल को निरूपित करने के लिए एक आयत अथवा समांतर चतुर्भुज का प्रयोग किया जाता है।

किसी तल का नामांकन दो प्रकार से किया जा सकता है:

(i) अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों जैसे p, q आदि द्वारा (आकृति 8.9)। इसे 'तल p' अथवा 'तल q' आदि पढ़ते हैं।

(ii) तल में स्थित तीन भिन्न बिन्दुओं A, B, C द्वारा जो एक ही रेखा में न हों (आकृति 8.10)। इसे 'तल ABC' पढ़ते हैं।



आकृति 8.9



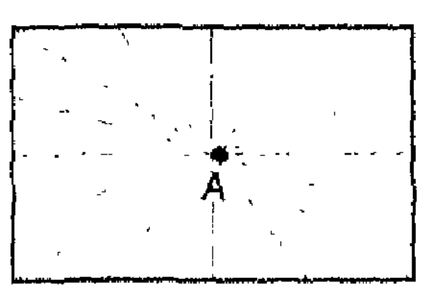
आकृति 8.10

8.4 रेखाओं और बिन्दुओं के गुण

आप प्राय: पढ़ते हैं 'बिन्दु A रेखा l पर स्थित है' या 'रेखा m बिन्दु A से होकर जाती है' आदि। एक तल में स्थित बिन्दुओं और रेखाओं के बीच 'पर स्थित है', 'से होकर जाती है' जैसे संबंध *आपतन गुण (incidence properties)* कहलाते हैं।

अब हम इस प्रकार के कुछ गुणों का अध्ययन करेंगे।

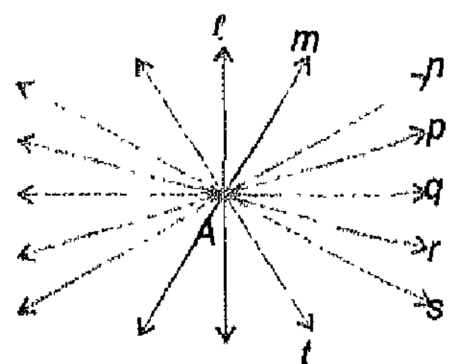
क्रियाकलाप 1: एक कागज पर एक बिन्दु A अंकित कीजिए। कागज को इस प्रकार मोड़िए कि मोड़ का निशान बिन्दु A से होकर जाए। इस प्रकार से मोड़ कर हम अनेक निशान बना सकते हैं जो सभी बिन्दु A से होकर जाती हैं (आकृति 8.11)। इस प्रकार हमें क्या ज्ञात होता है? हमें ज्ञात होता है कि A से होकर जाने वाले असंख्य मोड़ के निशान हैं।



आकृति 8.11

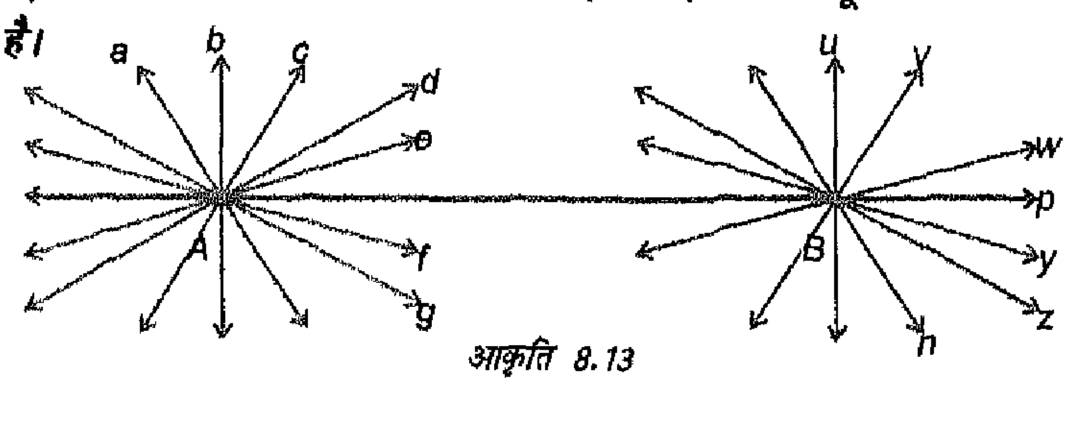
क्रियाकलाप 2 : एक कागज पर एक बिन्दु A अंकित कीजिए। एक नुकीली पेंसिल और एक पटरी (ruler) की सहायता से A से होकर जाने वाली एक रेखा l खींचिए। बिन्दु A से ही होकर जाने वाली एक दूसरी रेखा m खींचिए। इसी प्रक्रिया को दोहराते रहिए। A से होकर जाने वाली कितनी रेखाएँ हो सकती हैं? हम देखते हैं कि A से होकर हम जितनी चाहें रेखाएँ खींच सकते हैं (आकृति 8.12)। वास्तव में, किन्ही भी दो पहले से खींची गई रेखाओं के बीच बिन्दु A से होकर एक और रेखा खींची जा सकती है। इस प्रकार हम कहते हैं कि

किसी तल में स्थित एक बिन्दु से होकर असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती हैं।



आकृति 8.12

क्रियाकलाप 3 : एक कागज पर दो बिन्दु A व B अंकित कीजिए। A से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं? जितनी चाहें उतनी। B से होकर भी हम जितनी चाहें उतनी रेखाएँ खींच सकते हैं। प्रश्न है; क्या A से होकर जाने वाली कोई रेखा बिन्दु B से भी होकर जाती है (आकृति 8.13)? हम देखते हैं कि रेखा p बिन्दु A से भी होकर जाती है और B से भी। A तथा B से होकर जाने वाली परन्तु p से अलग कोई और रेखा खींचने का प्रयत्न कीजिए। क्या यह संभव है? नहीं। इस प्रकार, हम देखते हैं कि ***तल में स्थित दो भिन्न बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है। यह रेखा पूर्णतयः तल में स्थित होती है।***



आकृति 8.13

व्यवहारिक रूप में कागज के एक पन्ने को हम उस तल का भाग मान सकते हैं जिस तल में हम अपनी रचनाएँ बना रहे हैं। आप देख सकते हैं कि *बिन्दुओं A व B से होकर जाती हुई एक और केवल एक ही रेखा है।*

क्रियाकलाप 4 : एक ड्राइंग बोर्ड में दो ड्राइंग पिन लगाइए। मान लीजिए कि इन पिनों के सिरे [आकृति 8.14 (i)] तल में बिन्दुओं A व B को निरूपित करते हैं। एक डोरी या धागा लीजिए और उसका एक सिरा बिन्दु A पर लगाई गई पिन पर बाँधिए। डोरी में बिना ढील दिए उसके दूसरे सिरे को कस कर पकड़िए और हाथ को धीरे से इस प्रकार घुमाइए कि तनी हुई डोरी A के चारों ओर घूम जाए। आप क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि डोरी की केवल एक ही स्थिति ऐसी है जबकि वह बिन्दु B पर लगाई गई पिन को छूती है [आकृति 8.14(ii)]।



आकृति 8.14

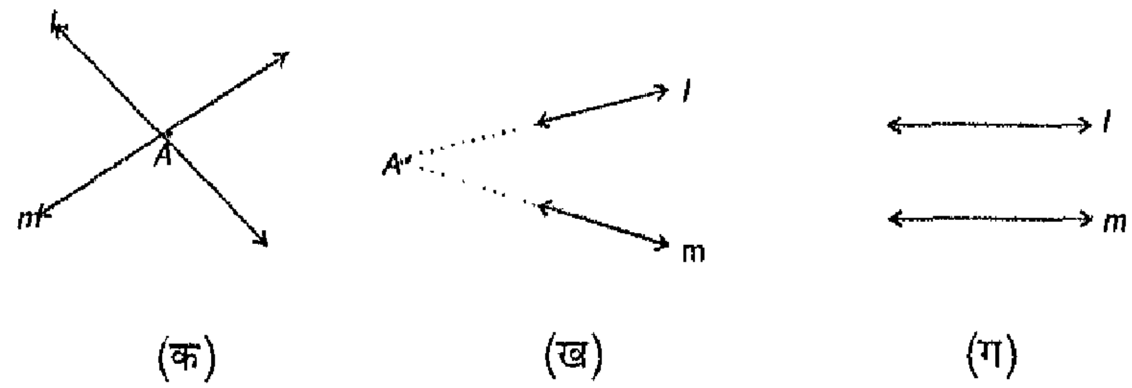
इससे यह प्रदर्शित होता है कि ***तल में दिए गए दो बिन्दुओं** A **व** B **से होकर जाने वाली केवल एक ही रेखा है।*** हम इसी तथ्य को निम्न प्रकार भी कह सकते हैं:

दो बिन्दुओं से एक अद्वितीय (unique) रेखा का निर्धारण होता है। अद्वितीय इस अर्थ में कि ऐसी केवल एक ही रेखा है। साथ ही, यह रेखा पूर्णतया तल में स्थित होती है।

क्रियाकलाप 5 : एक ही कागज पर दो रेखाएँ l व m खींचिए। ऐसा करने पर दो संभावनाएँ हो सकती हैं:

(i) दोनों रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं [आकृति 8.15(क), (ख)], अर्थात् वे एक बिन्दु पर मिलती हैं या एक उभयनिष्ठ बिन्दु से होकर जाती है।

(ii) दोनों रेखाएँ एक दूसरे को नहीं काटती अर्थात् एक उभयनिष्ठ बिन्दु पर नहीं मिलतीं [आकृति 8.15(ग)]।



आकृति 8.15

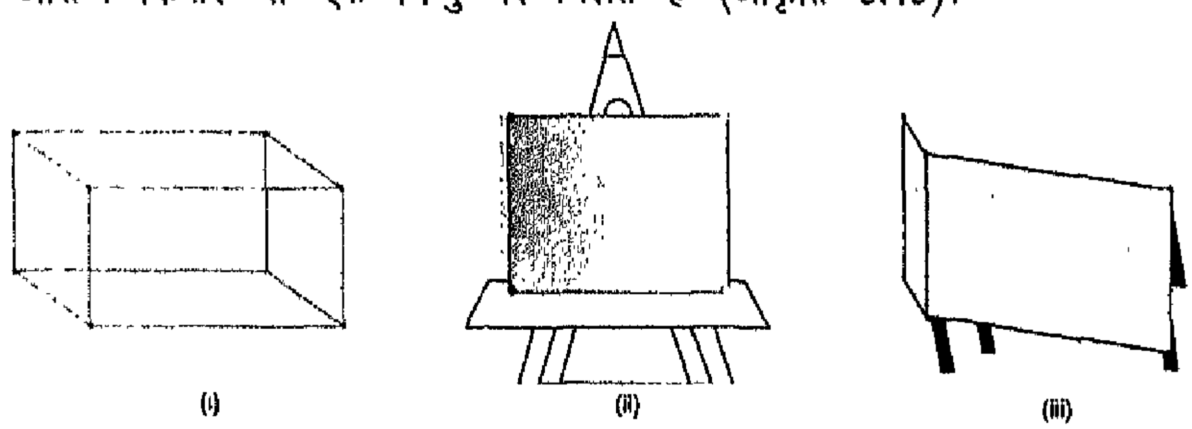
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक तल में दी हुई दो रेखाएँ *l* व *m* के लिए दो ही संभावनाएँ हैं:

(क) दोनों रेखाएँ एक बिन्दु पर काटती हैं। इस बिन्दु को रेखाओं का ***प्रतिच्छेद बिन्दु*** *(point of intersection)* कहते हैं।

(ख) दोनों रेखाएँ किसी भी बिन्दु पर एक दूसरे को नहीं काटतीं। इस प्रकार की रेखाएँ ***समान्तर रेखाएँ*** *(parallel lines)* कहलाती हैं।

आकृति 8.15 (क) और (ख) में, रेखाएँ *l* और *m* एक बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करती है। बिन्दु A रेखाओं *l* और *m* का प्रतिच्छेद बिन्दु कहलाता है।

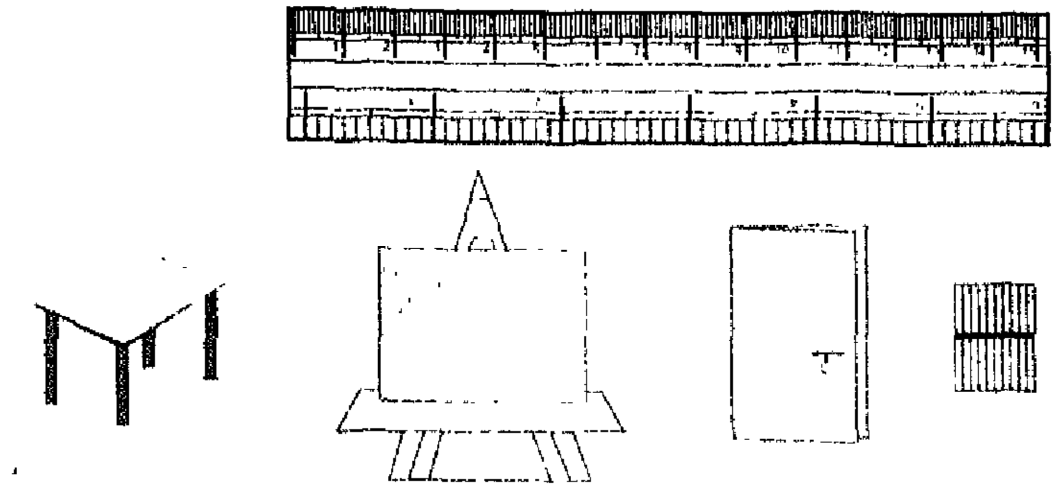
घनाभ के आसन्न किनारे एक बिन्दु पर मिलते हैं। श्यामपट्ट, या पलंग आदि के आसन्न किनारे भी एक बिन्दु पर मिलते हैं (आकृति 8.16)।



आकृति 8.16

आकृति 8.15(ग) में रेखाएँ *l* और *m* एक दूसरे को नहीं काटतीं, चाहे उन्हें किसी भी दिशा में कितना भी बढ़ाया जाए। अर्थात् रेखाओं *l* और *m* में कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं है। इस प्रकार रेखाएँ *l* और *m* परस्पर समांतर हैं।

पटरी, मेज के ऊपरी पृष्ठ, श्यामपट्ट, दरवाजे और खिड़की के सम्मुख किनारे समान्तर रेखाओं के उदाहरण हैं (आकृति 8.17)।



आकृति 8.17

8.5 संरेख बिन्दु

हम पढ़ चुके हैं कि

(i) किसी तल में स्थित एक बिन्दु से होकर असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

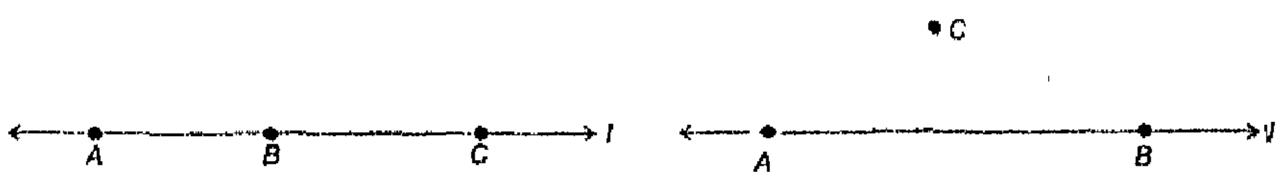
(ii) तल में स्थित दो बिन्दुओं से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

अब आइए किसी तल में तीन बिन्दु A, B व C लें। हम दो बिन्दुओं A व B से होकर जाती हुई एक रेखा *l* खींचते हैं। तीसरे बिन्दु C के लिए दो संभावनाएँ हैं [आकृति 8.18 (i) और (ii)]।

ये निम्न हैं :

(i) बिन्दु C रेखा *l* पर स्थित है।

(ii) बिन्दु C रेखा *l* पर स्थित नहीं है।

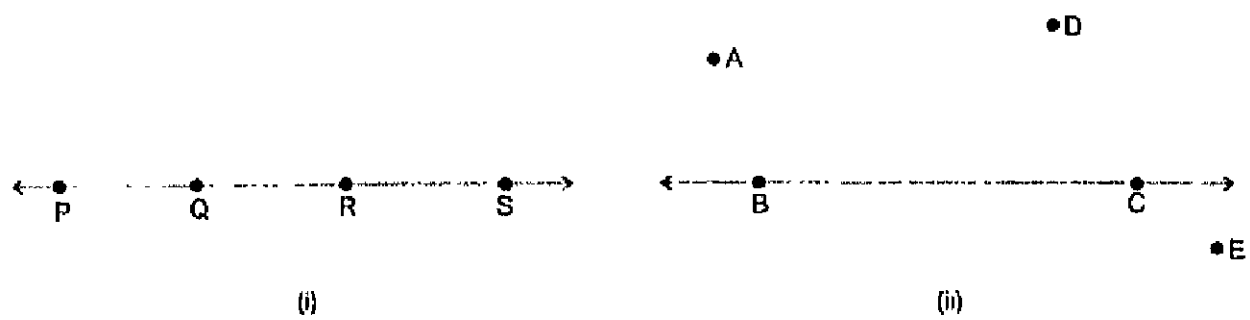


(i) संरेख बिन्दु (ii) असंरेख बिन्दु

आकृति 8.18

प्रथम स्थिति में बिन्दु A,B व C तीनों एक ही रेखा *l* पर स्थित हैं [आकृति 8.18 (i)]। इस स्थिति में हम कहते हैं कि तीनों बिन्दु A,B व C ***संरेख*** *(collinear)*

है। उदाहरण के लिए, यदि हम सूर्य, चंद्रमा व पृथ्वी को बिन्दु मानें, तो चंद्रग्रहण और सूर्यग्रहण में ये तीनों संरेख होते हैं। दूसरी स्थिति, जिसमें C रेखा l पर स्थित नहीं है, में हम कहते हैं कि तीनों बिन्दु A,B व C ***असंरेख बिन्दु*** *(non-collinear points) हैं* [आकृति 8.18 (ii)]।



आकृति 8.19

इसी प्रकार, आकृति 8.19 (i) में चारों बिन्दु P, Q, R व S संरेख हैं, क्योंकि ये सभी एक ही रेखा पर स्थित हैं; जबकि आकृति 8.19 (ii) में बिन्दु A, B, C, D व E असंरेखी हैं, क्योंकि ये सभी एक ही रेखा पर स्थित नहीं हैं।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि

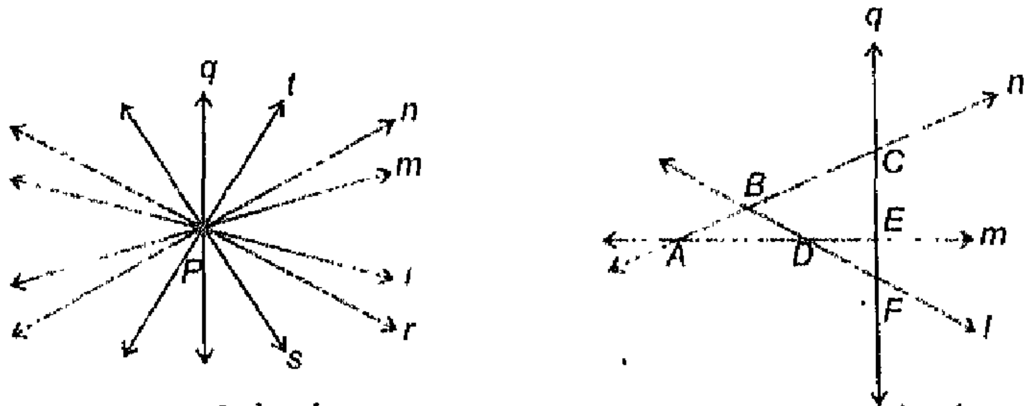
एक तल में स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दु संरेख होते हैं, यदि वे सभी एक ही रेखा पर स्थित हों। वैकल्पिक रूप में, हम कह सकते हैं कि एक ही तल में स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दु संरेख होते हैं, यदि किन्हीं दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा पर अन्य बिन्दु भी स्थित हों। एक तल में तीन या अधिक बिन्दु असंरेख होते हैं, यदि वे एक ही रेखा पर स्थित न हों।

टिप्पणी: यह ध्यान देने योग्य है कि दो बिन्दुओं से होकर एक रेखा खींची जा सकती है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दो बिन्दु सदैव संरेखी होते हैं। परन्तु यदि बिन्दु तीन या तीन से अधिक हैं, तो वे एक रेखा पर हो सकते हैं और नहीं भी हो सकते हैं। इसीलिए संरेखता की बात तीन या अधिक बिन्दुओं के लिए ही की जाती है।

8.6 संगामी रेखाएँ

जिस प्रकार हम कई बिन्दुओं के एक ही रेखा पर स्थित होने की बात करते हैं उसी प्रकार हम अनेक रेखाओं के एक ही बिन्दु से होकर जाने की स्थिति पर विचार करते हैं।

यदि एक ही तल में स्थित तीन या तीन से अधिक रेखाएँ एक ही बिन्दु से होकर जाती हैं [आकृति 8.20 (i)], तो ये रेखाएँ ***संगामी रेखाएँ*** *(concurrent lines)* कहलाती हैं। यह बिन्दु ***संगमन बिन्दु*** *(point of concurrence) कहलाता है।*



(i) *संगामी रेखाएँ* (ii) *असंगामी रेखाएँ*

आकृति 8.20

एक ही तल में स्थित जो रेखाएँ एक ही बिन्दु से होकर नहीं जाती वे ***असंगामी रेखाएँ*** *(non-concurrent lines)* कहलाती हैं [आकृति 8.20 (ii)]।

टिप्पणी : तीन या तीन से अधिक रेखाओं का संगमन बिन्दु उन रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु भी होता है। परन्तु तीन या अधिक रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु उन रेखाओं का संगमन बिन्दु होना आवश्यक नहीं है। उदाहरणार्थ, आकृति 8.20 (i) में बिन्दु P रेखाओं q, t, n, m, l, r व s का प्रतिच्छेद बिन्दु भी है और संगमन बिन्दु भी। परन्तु आकृति 8.20 (ii) में A, B, C, D, E व F रेखाओं q, l, m व n के प्रतिच्छेद बिन्दु हैं परन्तु इनमें से कोई भी बिन्दु रेखाओं q, l, m व n का संगमन बिन्दु नहीं है।

साथ ही, जिस प्रकार तीन या तीन से अधिक बिन्दुओं की संरेखता की बात होती है, उसी प्रकार तीन या तीन से अधिक रेखाओं के संगमन की बात की जाती है।

उदाहरण 1: आकृति 8.21 में से लिखिए:

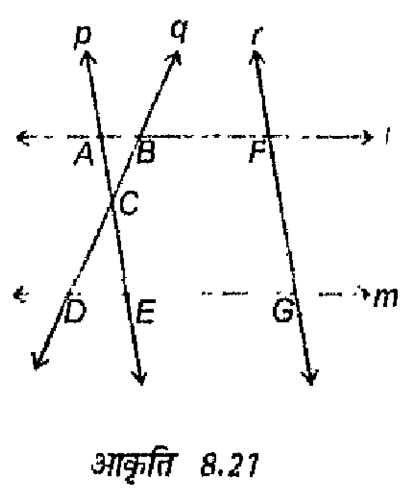
(i) समांतर रेखाओं के सभी युग्म।

(ii) प्रतिच्छेदी रेखाओं के सभी युग्म।

(iii) ऐसी रेखाएँ जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु D है।

(iv) ऐसे रेखा युग्म जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु A है।

(v) संरेखी बिन्दु।



आकृति 8.21

हल:

(i) रेखा l रेखा m के समान्तर है। रेखाएँ p व r भी समान्तर हैं।

(ii) अभीष्ट रेखा युग्म हैं: (l,p); (l,q); (l,r); (m,p); (m,q); (m,r); (p,q); विस्तार करने पर (q,r) ।

(iii) रेखाएँ m व q बिन्दु D पर काटती हैं।

(iv) A रेखाओं l व p का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

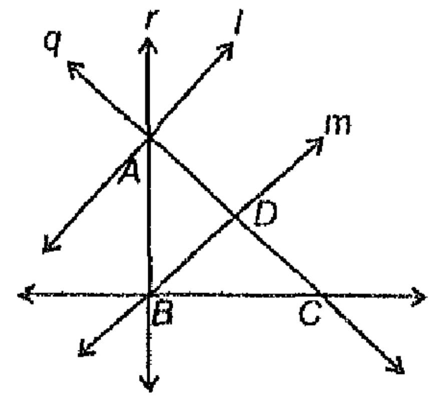
(v) (A, C, E); (A, B, F); (B, C, D); (D, E, G)

उदाहरण 2: आकृति 8.22 में से लिखिए :

(i) A पर काटने वाली रेखाएँ।

(ii) B पर काटने वाली रेखाएँ।

(iii) संगामी रेखाएँ व उनका संगमन बिन्दु।



आकृति 8.22

हल : (i) l, q व r बिन्दु A पर काटती हैं।

(ii) m, p व r, बिन्दु B पर काटती हैं।

(iii) l, q व r; संगमन बिन्दु A तथा

m, p व r; संगमन बिन्दु B।

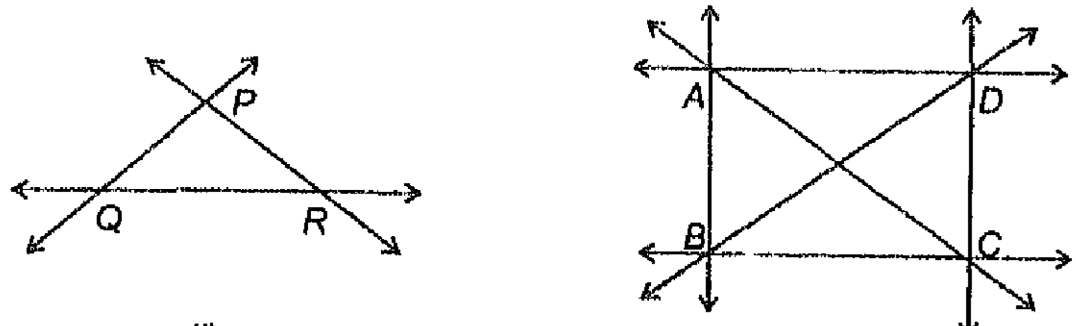
●●●

प्रश्नावली 8.1

1. आकृति 8.23 में दिखाए गए बिन्दुओं को नामांकित कीजिए तथा उनको क्रम में जोड़िए :

आकृति 8.23

2. आकृति 8.24 में दी गई रेखाओं को नामांकित कीजिए।

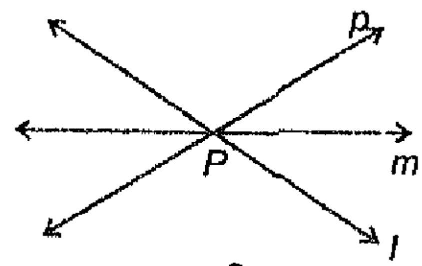


(i) आकृति 8.24 (ii)

3. अपने पर्यावरण से निम्नलिखित के भागों के दो-दो उदाहरण दीजिए:

(i) रेखाएँ (ii) तल

4. आकृति 8.25 को देखिए। बिन्दु P से होकर रेखाएँ *l*, *m* व *p* खींची गई हैं। क्या P से होकर और भी रेखाएँ खींची जा सकती हैं? यदि हाँ, तो कितनी?



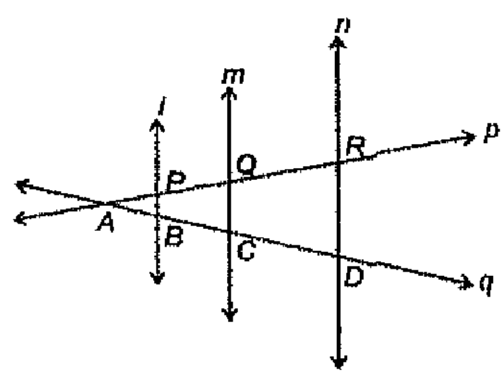
आकृति 8.25

5. P व Q एक तल में स्थित दो भिन्न बिन्दु हैं (आकृति 8.26)। इन बिन्दुओं से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं?



आकृति 8.26

6. अपने पर्यावरण से निम्नलिखित के दो-दो उदाहरण दीजिए:
   (i) प्रतिच्छेदी रेखाएँ (ii) समांतर रेखाएँ
7. एक तल में स्थित दो बिन्दुओं A व B से कितनी भिन्न रेखाएँ निर्धारित होती हैं?
8. स्पष्ट कीजिए कि किसी रेखा के मध्य-बिन्दु का होना क्यों संभव नहीं है।
9. आकृति 8.27 से बताइए:
   (i) सभी समांतर रेखाओं के युग्म।
   (ii) सभी प्रतिच्छेदी रेखाओं के युग्म।
   (iii) रेखाएँ जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु P है।
   (iv) रेखाएँ जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु C है।
   (v) रेखाएँ जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु R है।
   (vi) संरेखी बिन्दु।



आकृति 8.27

10. एक आकृति बनाइए जिसमें बिन्दु A, B, C व D संरेखी हों।

11. अपनी अभ्यास पुस्तिका में चार बिन्दु A, B, C व D इस प्रकार अंकित कीजिए कि उनमें से कोई भी तीन बिन्दु संरेखी न हों। ऐसी सभी रेखाएँ खींचिए जो इन बिन्दुओं को युग्मों मे जोड़ने से बनती हैं।

(i) इस प्रकार की कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

(ii) इन रेखाओं के नाम लिखिए।

(iii) उन रेखाओं के नाम लिखिए जो C पर संगामी हैं।

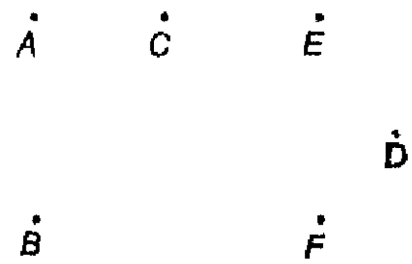
12. आकृति 8.28 में अंकित बिन्दुओं A, B, C, D, E और F में से जाँच कीजिए कि निम्न बिन्दु सरेख हैं या नहीं:

(i) A, B व C।

(ii) B, C व E।

(iii) A, C व E।

(iv) C, E व F।

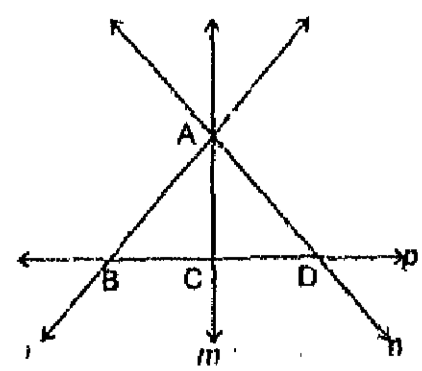


आकृति 8.28

13. आकृति 8.29 से लिखिए:

(i) संरेखी बिन्दु।

(ii) संगामी रेखाएँ और उनके संगमन बिन्दु।



आकृति 8.29

14. एक तल में तीन रेखाएँ इस प्रकार खींचिए कि हमें

(i) अधिकतम प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त हों। इस प्रकार कितने प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त होते हैं?

(ii) न्यूनतम प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त हों। इस प्रकार कितने प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त होते हैं?

15. रेखाएँ *l*, *m* व *n* संगामी हैं। इसी प्रकार रेखाएँ *l*, *m* व *p* संगामी हैं। क्या *l*, *m*, *n* व *p* भी संगामी होंगी?

16. रिक्त स्थान भरिए:

(a) एक सूक्ष्म चिह्न (dot) हमें एक ------ का आभास कराता है।

(b) पटरी का एक किनारा हमें एक ------- का आभास कराता है।

(c) दीवार हमें एक ------ का आभास कराती है।

(d) तल में स्थित दो रेखाएँ, जो समान्तर नहीं हैं, ---- हैं।

(e) तीन या तीन से अधिक बिन्दु जो एक रेखा पर स्थित हैं ------ होते हैं।

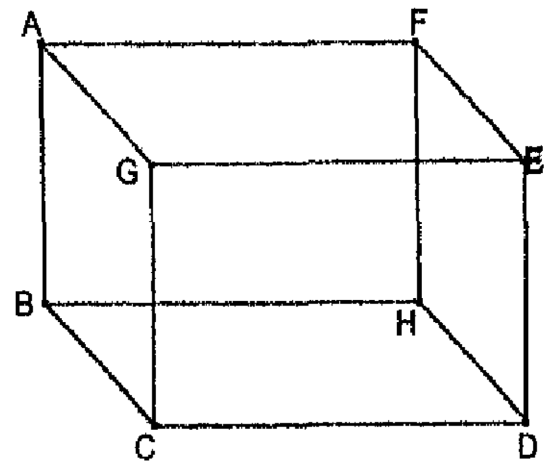
(f) तीन या तीन से अधिक रेखाएँ जो एक बिन्दु से होकर जाती हैं ----- हैं।

17. आकृति 8.30 में,

(i) कितने बिन्दु अंकित हैं? उनके नाम लिखिए।

(ii) कितने रेखाओं (के भाग) दिखाए गए हैं? उनके नाम लिखिए।

(iii) कितने तलों (के भाग) दिखाए गए हैं? उनके नाम लिखिए।



आकृति 8.30

18. बताइए निम्न में से कौन से कथन सत्य (T) और कौन से असत्य (F) हैं:

(i) बिन्दु की एक स्थिति होती है परन्तु कोई आकार नहीं होता।

(ii) तल में स्थित दो रेखाएँ सदैव एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

(iii) दो भिन्न बिन्दुओं से होकर असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(iv) चार बिन्दु संरेखी होंगे, यदि उनमें से कोई भी तीन एक रेखा पर स्थित हैं।

(v) एक दिए हुए बिन्दु से होकर असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(vi) यदि दो रेखाएँ बिन्दु P पर काटती हैं, तो P दोनों रेखाओं का संगमन बिन्दु कहलाता है।

(vii) तीन रेखाएँ युग्मों के रूप में अधिकतम तीन बिन्दुओं पर काटती हैं।

याद रखने योग्य बातें

1. बिन्दु की एक स्थिति होती है और इसका स्थान निश्चित किया जा सकता है।
2. रेखा सीधी होती है और दोनों दिशाओं में अपरिमित रूप से विस्तृत होती है।
3. यह सोचा जा सकता है कि तल एक सपाट पृष्ठ है जो सभी दिशाओं में अपरिमित रूप से विस्तृत होता है।
4. तल में दिए हुए एक बिन्दु से होकर असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
5. तल में दिए हुए दो भिन्न बिन्दुओं से होकर केवल एक रेखा खींची जा सकती है और वह पूर्णतय: उस तल में स्थित होती है।
6. एक ही तल में स्थित दो रेखाएँ या तो केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं या समांतर होती हैं।
7. तल में स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दु ***संरेख*** होते हैं, यदि वे सभी एक ही रेखा पर स्थित हों।
8. तीन या तीन से अधिक रेखाएँ ***संगामी*** होती हैं, यदि वे सभी एक ही बिन्दु से होकर जाती हैं। यह बिन्दु उनका ***संगमन बिन्दु*** कहलाता है।

रेखाखंड — अध्याय 9

9.1 भूमिका

पिछले अध्याय में आप पढ़ चुके हैं कि बिन्दु, रेखा, या तल से क्या अभिप्राय होता है। इस अध्याय में हम रेखा के एक भाग पर ध्यान केन्द्रित करेंगे। याद कीजिए कि रेखा का दोनों दिशाओं में अपरिमित विस्तार होता है और इसलिए इसे कागज पर पूरी तरह से नहीं खींचा जा सकता। हम रेखा के एक भाग से ही अपना काम चलाते हैं जिसे ***रेखाखंड*** *(line segment)* कहते हैं।

9.2 रेखाखंड

आइए एक रेखा *l* पर दो बिन्दु A और B अंकित करें (आकृति 9.1)। रेखा का वह भाग जो A से B तक जाता है *रेखाखंड* AB कहलाता है।



आकृति 9.1

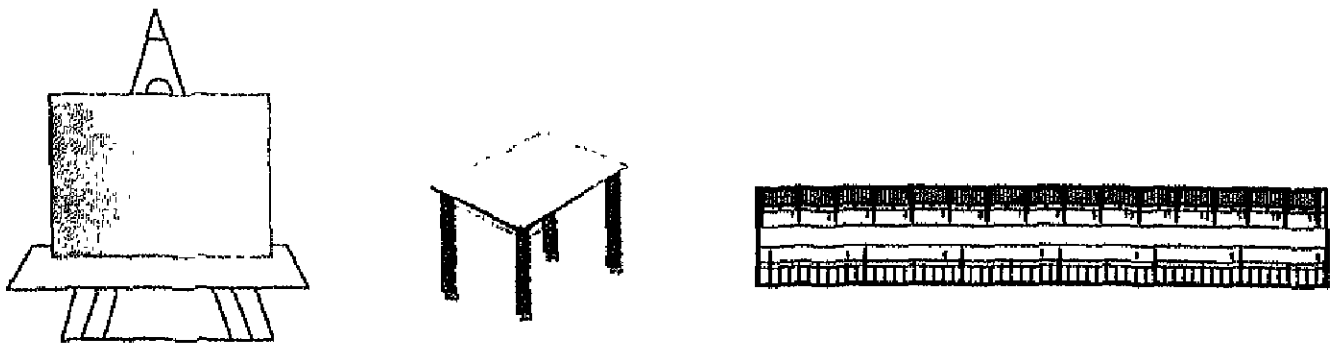
बिन्दु A व B रेखाखंड AB के ***अंत बिन्दु*** *(end points)* कहलाते हैं (आकृति 9.2)। इस प्रकार यदि अन्त बिन्दु ज्ञात हों, तो रेखाखंड AB को पूर्णतया निर्धारित किया जा सकता है। रेखाखंड AB को रेखाखंड BA भी कह सकते हैं। इसे $\overline{AB}$ अथवा $\overline{BA}$ से व्यक्त करते हैं तथा *'रेखाखंड* AB' या *'रेखाखंड* BA' पढ़ते हैं।



आकृति 9.2

साथ ही, बिन्दुओं A व B को मिलाने वाला केवल एक ही रेखाखंड हो सकता है, क्योंकि हम जानते हैं कि दो भिन्न बिन्दुओं से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि *रेखाखंड रेखा का एक भाग होता है और इसके अंत बिन्दु निश्चित होते हैं।*

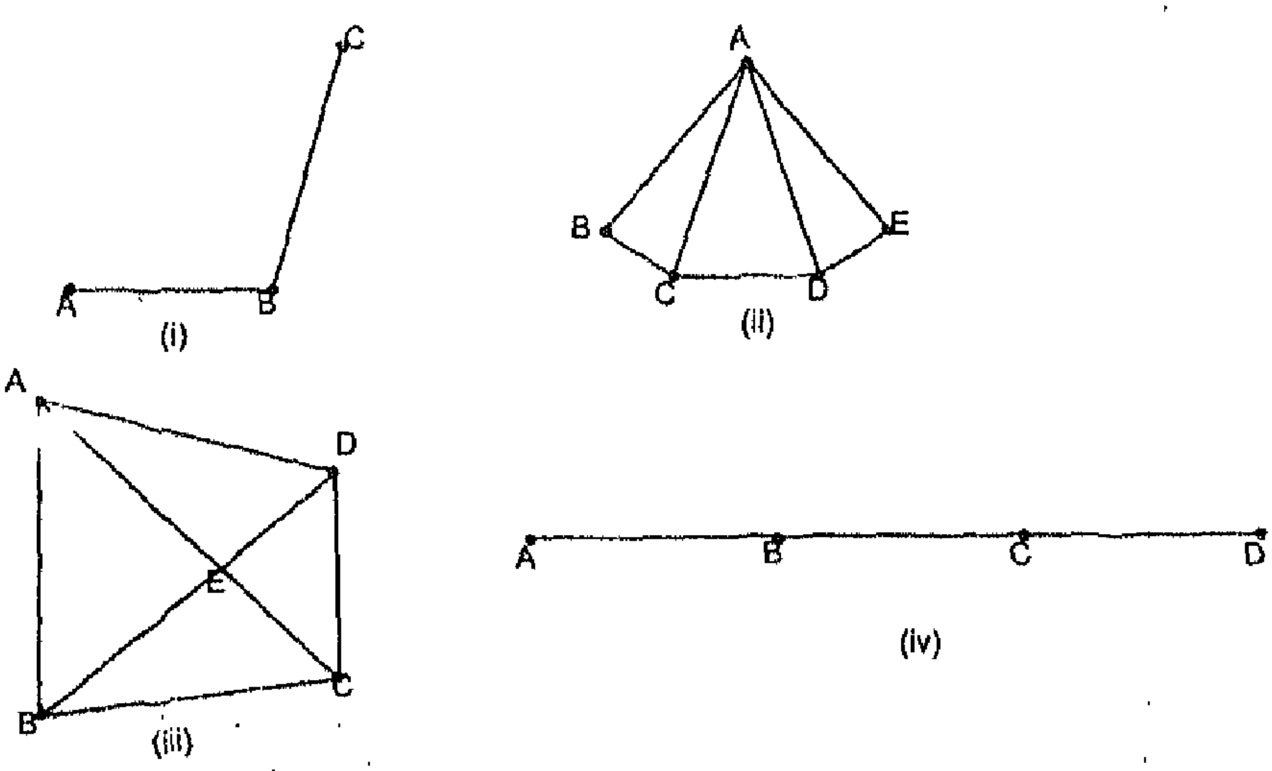
क्या आप अपने आस-पास दिखाई देने वाली वस्तुओं से रेखाखंडों के कुछ उदाहरण दे सकते हैं? अवश्य! आपके श्यामपट्ट के किनारे, आपकी मेज का किनारा, आपकी पटरी का किनारा सभी रेखाखंडों के उदाहरण हैं, क्योंकि इनके अंत बिन्दु निश्चित हैं।



आकृति 9.3

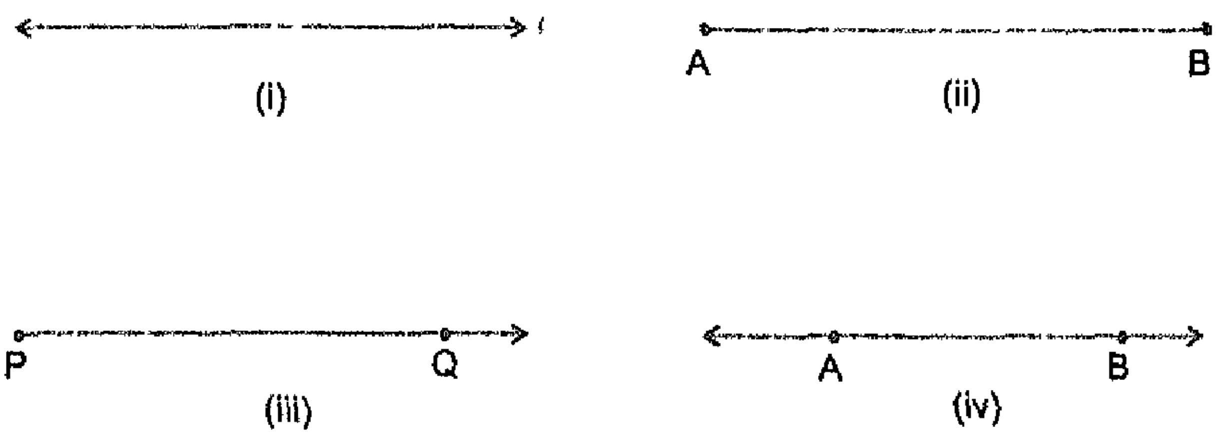
प्रश्नावली 9.1

1. निम्न आकृतियों में से प्रत्येक में कितने रेखाखंड हैं? सभी के नाम लिखिए।



आकृति 9.4

2. निम्न में कौन-सी आकृतियाँ रेखाखंड निरूपित करती हैं?



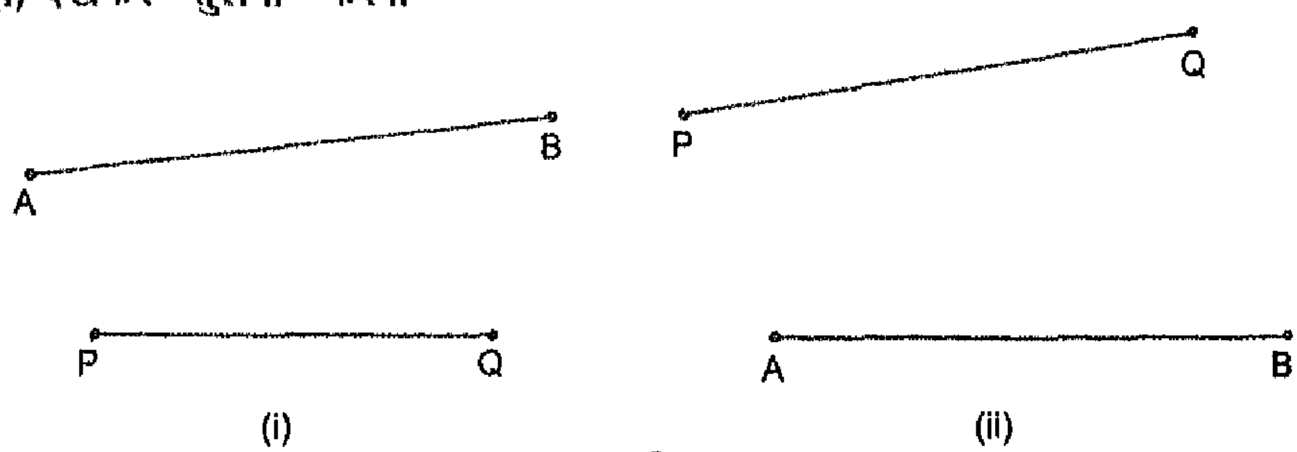
आकृति 9.5

3. अपने पर्यावरण से रेखाखंडों के तीन उदाहरण लिखिए।

9.3 रेखाखंडों की तुलना

दो रेखाखंडों की तुलना से हमारा अभिप्राय उनकी लम्बाइयों के बीच क्रम संबंध से है, अर्थात् हम यह देखते हैं कि उनमें कौन सा रेखाखंड लम्बा है और कौन सा छोटा।

(i) देखकर तुलना करना



आकृति 9.6

आकृति 9.6 (i) व (ii) में दिए गए रेखाखंडों AB और PQ को देखिए। (i) में केवल देखकर ही हम बता सकते हैं कि कौन सा रेखाखंड छोटा है, परन्तु (ii) में रेखाखंडों की लम्बाइयों में बहुत कम अन्तर है। इस स्थिति में केवल देखकर

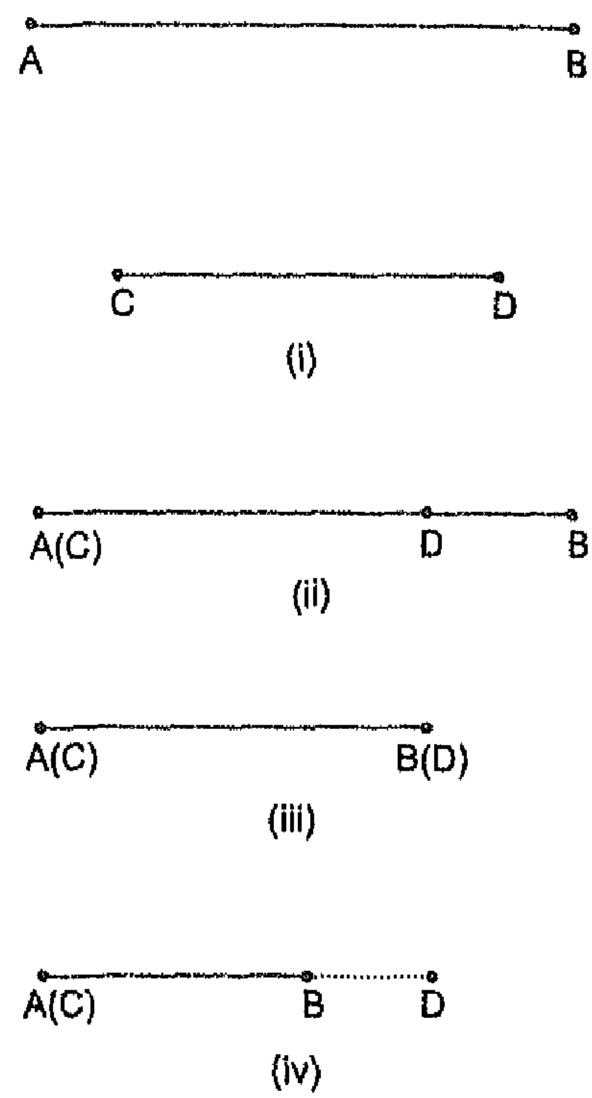
ही नहीं बताया जा सकता कि कौन सा रेखाखंड छोटा है। इसलिए हमें रेखाखंडों की तुलना करने के लिए अच्छी विधियों की आवश्यकता है।

(ii) अक्स द्वारा तुलना करना

मान लीजिए हम रेखाखंडों AB व CD की लम्बाइयों की तुलना करना चाहते हैं। हम अक्स करने का कागज लेते हैं और उसे रेखाखंड CD पर रखते हैं [आकृति 9.7 (i)]। हम अक्स करने के कागज पर पटरी और पेंसिल की सहायता से इस रेखाखंड का अक्स करते (खींचते) हैं।

अब हम यह अक्स करने का कागज रेखाखंड AB पर इस प्रकार रखते हैं कि बिन्दु C बिन्दु A पर रहे तथा रेखाखंड CD रेखाखंड AB के अनुदिश रहे। अब रेखा AB पर बिन्दु D की स्थिति की तीन संभावनाएँ हैं:

(क) यदि D बिन्दुओं A व B के बीच स्थित है [आकृति 9.7 (ii)], तो हम लिखते हैं CD < AB और कहते हैं कि रेखाखंड CD, रेखाखंड AB से छोटा है। इसका अभिप्राय है कि CD की लम्बाई, AB की लम्बाई से कम है।



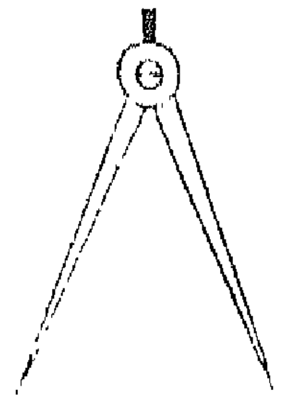
आकृति 9.7

(ख) बिन्दु D ठीक B पर है [आकृति 9.7 (iii)]। इस स्थिति में हम कहते हैं कि रेखाखंड CD रेखाखंड AB के बराबर है। हम इसे लिखते हैं कि CD = AB है और पढ़ते हैं 'CD बराबर है AB'। इसका अभिप्राय है कि CD की लम्बाई AB की लम्बाई के बराबर है। इस प्रकार ***दो समान लम्बाइयों वाले रेखाखंड बराबर कहलाते हैं।***

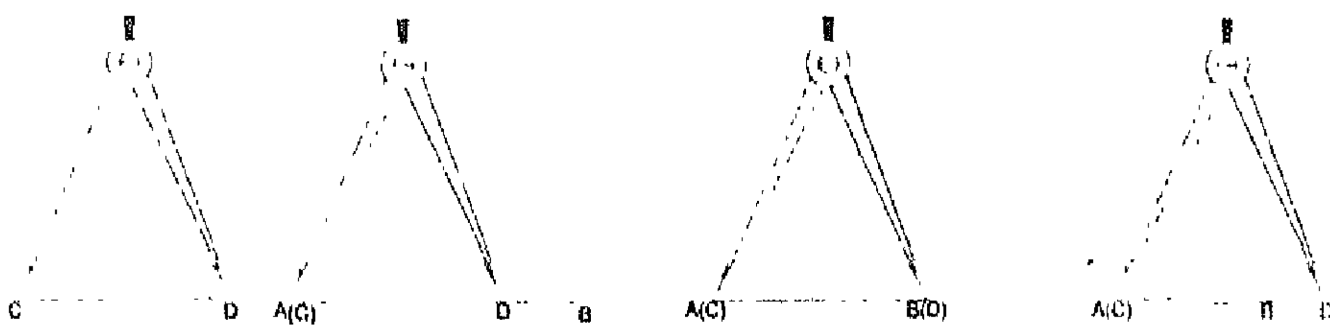
(ग) यदि बिन्दु D रेखा AB पर बिन्दु B से आगे है [आकृति 9.7 (iv)], तो हम लिखते हैं CD > AB और पढ़ते हैं 'CD, AB से बड़ा है'। इसका अभिप्राय है कि रेखाखंड CD की लम्बाई, रेखाखंड AB की लम्बाई से अधिक है।

(iii) डिवाइडर द्वारा तुलना करना

अपने ज्यामिति बक्स में रखे *'डिवाइडर' (divider)* नामक उपकरण से आप भली भाँति परिचित हैं (आकृति 9.8) अब हम डिवाइडर द्वारा दो रेखाखंडों AB व CD की तुलना करेंगे। इसके लिए हम डिवाइडर की एक भुजा के सिरे को बिन्दु C पर रखते हैं तथा दूसरी भुजा को सावधानीपूर्वक खोलते हुए उसके सिरे को बिन्दु D तक लाते हैं [आकृति 9.9(i)]।



आकृति 9.8



आकृति 9.9

अब डिवाइडर को हटाते हैं और उसके फैलाव में कोई भी परिवर्तन किए बिना, उसकी एक भुजा के सिरे को बिन्दु A पर तथा दूसरी भुजा के सिरे को रेखा AB पर रखते हैं। यहाँ भी पहले की तरह तीन संभावनाएँ हैं:

(i) यदि दूसरी भुजा का सिरा A और B के बीच में आए, तो CD < AB है [आकृति 9.9 (ii)]।

(ii) यदि यह सिरा ठीक B पर आए, तो CD = AB है [आकृति 9.9 (iii)]।

(iii) यदि दूसरी भुजा का सिरा B से आगे जाए, तो CD > AB है [आकृति 9.9 (iv)]।

9.4 रेखाखंडों का मापन

आप जानते हैं कि लम्बाई मापने के कुछ मानक मात्रक (standard units) हैं, जैसे किलोमीटर, मीटर, सेंटीमीटर आदि। मापन के बारे अब हम कुछ विस्तार से विचार करेंगे। आकृति 9.10 में दिए गए उपकरण पटरी को देखिए। यह 15 भागों में विभाजित है। प्रत्येक भाग की लम्बाई 1 सेमी है। प्रत्येक 1 सेमी भाग फिर 10 छोटे भागों में बाँटा गया है। इनमें प्रत्येक छोटे भाग की लम्बाई 1 मिलीमीटर (मिमी) है। इस प्रकार, 1 सेमी = 10 मिमी और 1 मिमी = 0.1 सेमी है। इसलिए 2 सेमी 3 मिमी की दूरी को हम 2.3 सेमी, 7 सेमी 7 मिमी को 7.7 सेमी तथा 5 सेमी 9 मिमी को 5.9 सेमी भी लिखते हैं।

अब हम रेखाखंडों को सेमी तथा मिमी में मापना सीखेंगे।

मान लीजिए कि हमें रेखाखंड AB को मापना है। हम पटरी के किनारे को रेखाखंड AB के अनुदिश इस प्रकार रखते हैं कि पटरी का शून्य चिह्न बिन्दु A पर रहे। अब हम पटरी पर वह चिह्न पढ़ते हैं जो बिन्दु B के सामने है। पटरी पर अंकित यह चिह्न ही रेखाखंड AB की माप है। आकृति 9.10 में यह चिह्न 5 सेमी तथा 8 मिमी प्रदर्शित करता है। अत: रेखाखंड AB की लम्बाई 5 सेमी 8 मिमी या 5.8 सेमी है। हम इसे 'AB = 5.8 सेमी' के रूप में लिखते हैं।

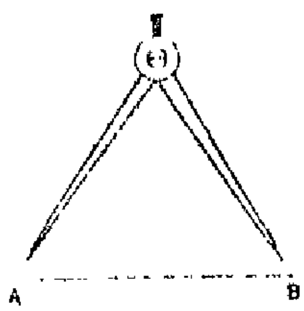


आकृति 9.10

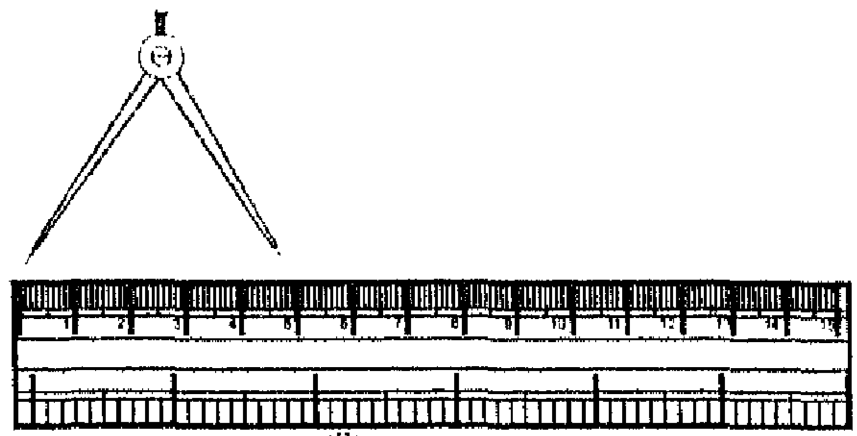
पटरी की मोटाई के कारण पटरी पर लगे चिह्न उसी समतल में नहीं होते जिसमें रेखाखंड AB है। इसके कारण शून्य (0) के चिह्न को बिन्दु A के सामने रखने में या B के सामने के चिह्न को पढ़ने में कुछ गलती हो सकती है। इस गलती से बचने के लिए हम ***डिवाइडर की सहायता*** से मापन कर सकते हैं। इसके लिए हम डिवाइडर को इतना खोलते हैं कि इसकी एक भुजा का सिरा बिन्दु A पर तथा दूसरी भुजा का सिरा बिन्दु B पर रहे [आकृति 9.11(i)]।

अब डिवाइडर के फैलाव को बिना बदले, उसे रेखाखंड से उठाकर पटरी पर इस प्रकार रखते हैं कि उसकी एक भुजा का सिरा शून्य के चिह्न पर रहे जैसा

आकृति 9.11 (ii) में दिखाया गया है। अब हम पटरी का वह चिह्न पढ़ते हैं जिस पर डिवाइडर की दूसरी भुजा का सिरा है। इस प्रकार रेखाखंड AB की लम्बाई प्राप्त हो जाती है। आकृति में यह लम्बाई 5 सेमी है।



(i)

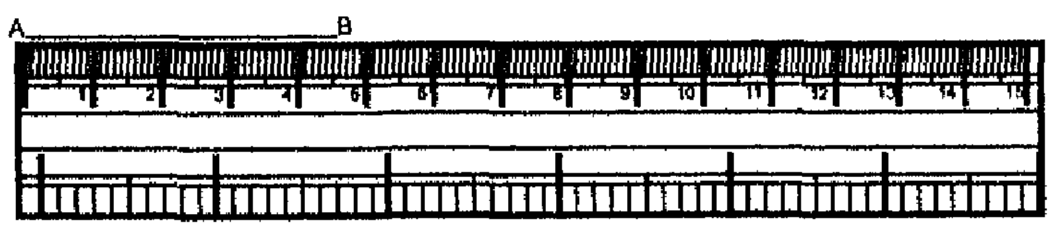


(ii)

आकृति 9.11

9.5 दी हुई लम्बाई के रेखाखंड की रचना करना

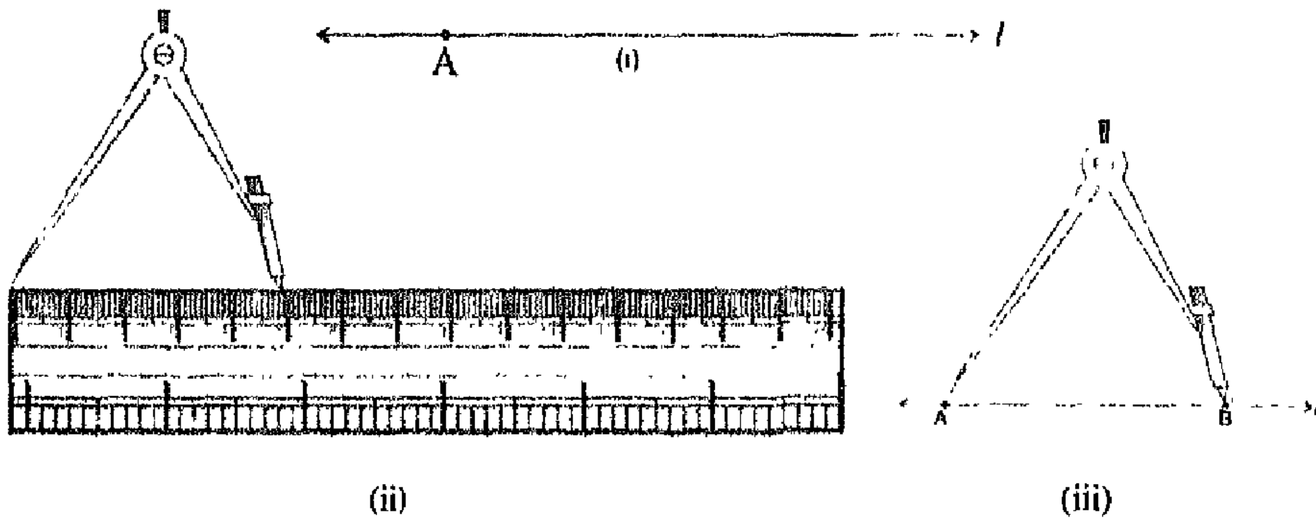
मान लीजिए हमें 4.5 सेमी लम्बाई का रेखाखंड खींचना है। इसके लिए अपनी अभ्यास पुस्तिका के पन्ने पर एक बिन्दु A अंकित कीजिए। अब पटरी को इस प्रकार रखिए कि उसका शून्य चिह्न A पर रहे। अब हम पटरी पर 4.5 सेमी के चिह्न के संगत बिन्दु को B अंकित करते हैं। पटरी की सहायता से बिन्दु A से बिन्दु B तक पेंसिल चलाकर जो रेखाखंड AB प्राप्त होता है वही 4.5 सेमी लम्बा अभीष्ट रेखाखंड है (आकृति 9.12)। इसी प्रकार, हम अन्य लम्बाइयों वाले रेखाखंड बना सकते हैं।



आकृति 9.12

रेखाखंडों की रचना परकार द्वारा भी की जा सकती है। मान लीजिए हमें 5 सेमी लम्बे रेखाखंड की रचना करनी है। हम पहले की तरह अभ्यास पुस्तिका पर एक बिन्दु A अंकित करते हैं और इससे जाती हुई एक रेखा *l* खींचते हैं

[आकृति 9.13(i)]। अब हम परकार के धातु वाले सिरे को पटरी के शून्य चिह्न पर रखते हैं और परकार को इतना खोलते हैं कि पेंसिल की नोक पटरी के उस चिह्न के सामने आ जाए जहाँ पर 5 सेमी दिखाया गया है [आकृति 9.13(ii)]। अब परकार के फैलाव में बिना कोई बदलाव किए, हम उसको रेखा *l* पर इस प्रकार रखते हैं कि धातु वाला सिरा बिन्दु A पर हो। फिर पेंसिल की नोक से रेखा पर, एक छोटा सा चिह्न लगाते हैं जो रेखा *l* को B पर काटता है [आकृति 9.13(iii)]। इस प्रकार प्राप्त रेखाखंड AB ही अभीष्ट लम्बाई 5 सेमी का रेखाखंड है। इसी प्रकार, परकार की सहायता से अन्य लम्बाइयों वाले रेखाखंड बनाए जा सकते हैं।

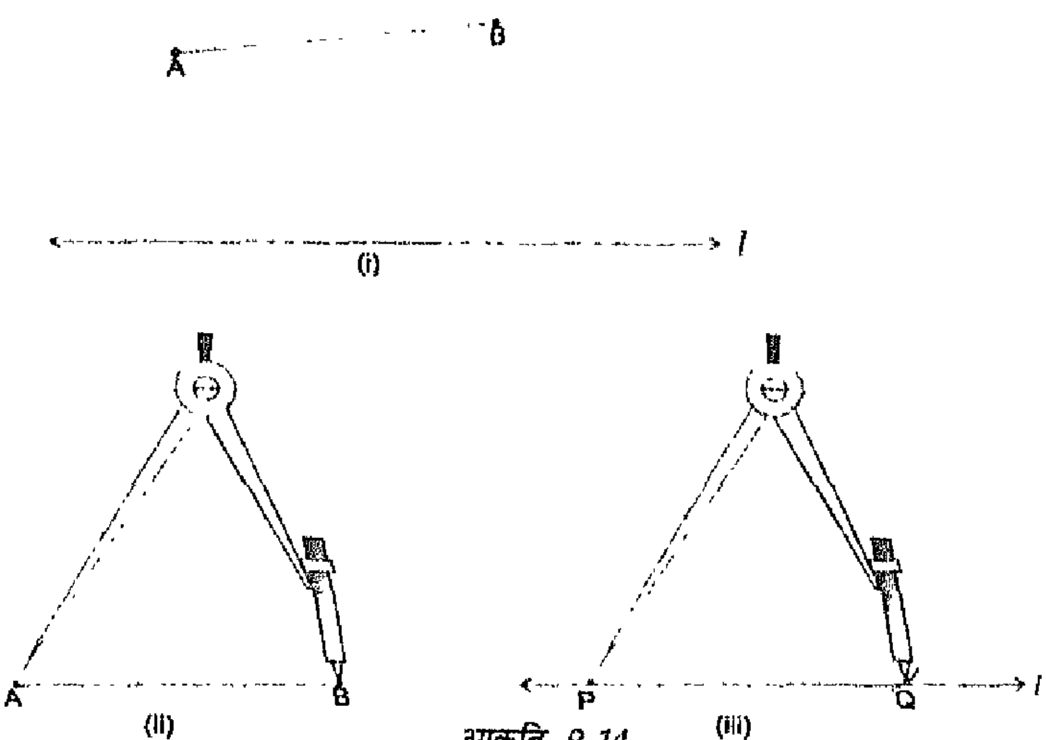


आकृति 9.13

9.6 एक रेखा से दिए हुए रेखाखंड के बराबर रेखाखंड काटना

मान लीजिए एक रेखाखंड AB है तथा *l* एक दी गई रेखा है। हमें रेखा *l* में से रेखाखंड AB के बराबर रेखाखंड काटना है [आकृति 9.14 (i)]। इस रचना के लिए हम डिवाइडर या परकार का प्रयोग कर सकते हैं। हम यहाँ परकार का प्रयोग कर रहे हैं।

रेखा *l* पर एक बिन्दु P अंकित कीजिए। अब परकार को खोलिए और उसे इस प्रकार समायोजित कीजिए कि उसका धातु वाला सिरा बिन्दु A पर हो तथा पेंसिल की नोक बिन्दु B पर हो [आकृति 9.14(ii)]। अब परकार को उठाइए और उसके फैलाव में कोई परिवर्तन किए बिना उसके धातु वाले सिरे को बिंदु P पर रख कर रेखा *l* पर एक छोटा सा चिह्न बनाइए और उसे Q से व्यक्त कीजिए। इस प्रकार प्राप्त रेखाखंड PQ ही अभीष्ट रेखाखंड है जिसकी लम्बाई रेखाखंड AB की लम्बाई के बराबर है [आकृति 9.14 (iii)]।

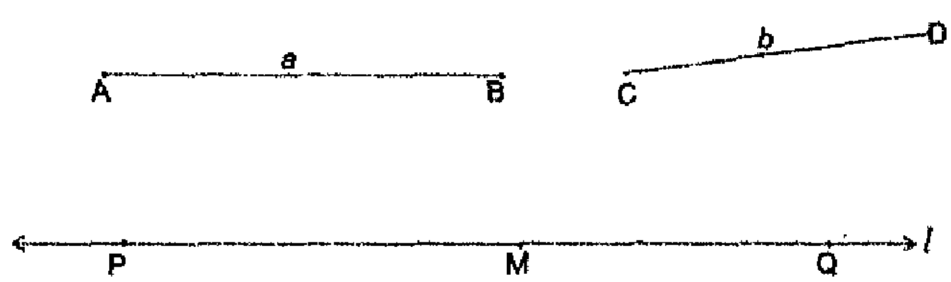


आकृति 9.14

9.7 एक रेखाखंड की रचना करना जिसकी लम्बाई दो दिए हुए रेखाखडों की लम्बाइयों का योग हो

मान लीजिए दो रेखाखंड AB व CD दिए हुए हैं, जिनकी लम्बाइयाँ क्रमश: a व b हैं। हमें एक ऐसे रेखाखंड PQ की रचना करनी है जिसकी लम्बाई $a + b$ हो।

हम एक रेखा l खींचते हैं और उस पर एक बिन्दु P अंकित करते हैं। अब हम अनुच्छेद 9.6 की विधि का प्रयोग करते हुए, रेखा l पर एक रेखाखंड PM बनाते हैं जिसकी लम्बाई रेखाखंड AB की लम्बाई के बराबर अर्थात् a है। अब हम इसी विधि का पुन: प्रयोग कर रेखा l पर ही रेखाखंड MQ बनाते हैं जिसकी लम्बाई CD की लम्बाई अर्थात् b के बराबर है तथा Q बिन्दु P के उसी ओर है जिस ओर M है (आकृति 9.15)। इस प्रकार प्राप्त रेखाखंड PQ ही अभीष्ट लम्बाई $a + b$ वाला रेखाखंड है। इस स्थिति में, हम लिख सकते हैं कि AB + CD = PQ है।

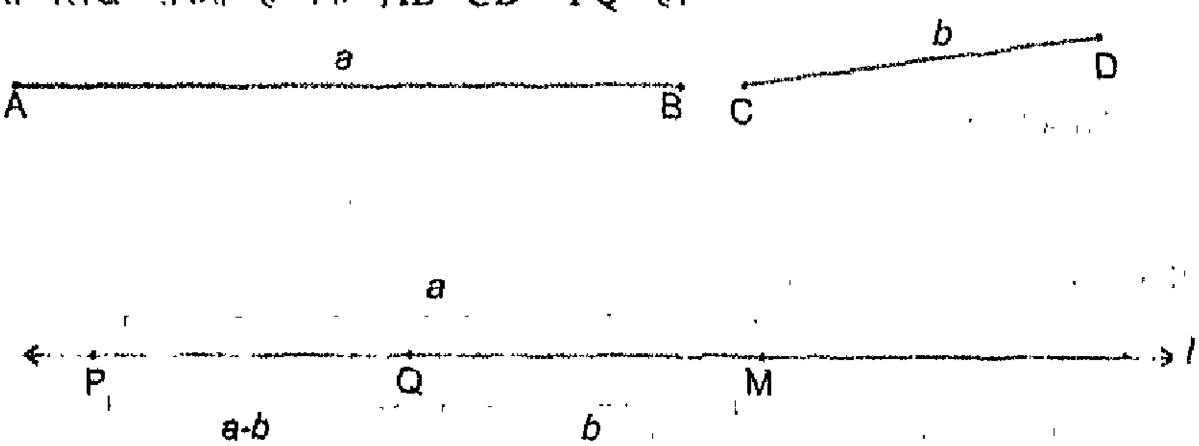


आकृति 9.15

9.8 एक रेखाखंड की रचना करना जिसकी लम्बाई दो दिए हुए रेखाखंडों की लम्बाइयों का अन्तर हो

मान लीजिए AB व CD दो रेखाखंड दिए हैं जिनकी लम्बाइयाँ क्रमशः a व b हैं और $a > b$ है। हमें एक ऐसा रेखाखंड PQ बनाना है जिसकी लम्बाई $a - b$ हो।

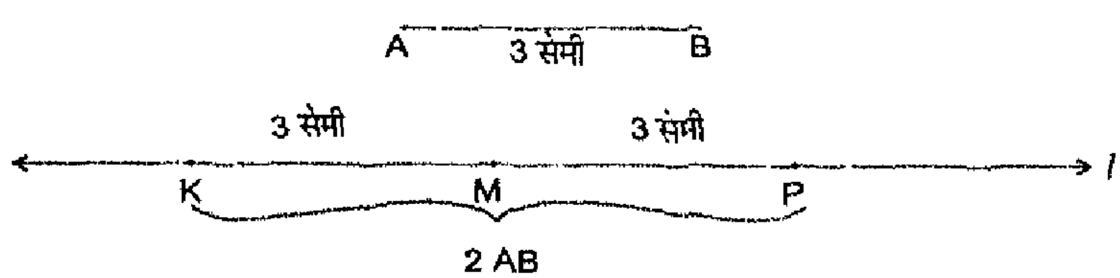
किसी रेखा l पर एक बिन्दु P अंकित करते हैं। अब रेखा l पर एक रेखाखंड PM बनाते हैं जिसकी लम्बाई a है। अब रेखा l पर ही लम्बाई b का रेखाखंड MQ इस प्रकार बनाते हैं कि बिन्दु Q बिन्दु M के उस ओर हो जिस ओर P है। इस प्रकार प्राप्त रेखाखंड PQ ही अभीष्ट लम्बाई $a-b$ वाला रेखाखंड है (आकृति 9.16)। हम इसे लिख सकते हैं कि AB−CD = PQ है।



आकृति 9.16

उदाहरण 1 : 3 सेमी लम्बाई का एक रेखाखंड AB दिया है। एक ऐसा रेखाखंड खींचिए जिसकी लम्बाई 2AB हो।

हल : एक रेखा l खींच कर उस पर एक बिन्दु K अंकित करते हैं। अब l पर रेखाखंड AB की लम्बाई के बराबर रेखाखंड KM बनाते हैं। अब M से प्रारम्भ कर एक रेखाखंड MP बनाते हैं जिसकी लम्बाई भी रेखाखंड AB के बराबर है (आकृति 9.17)। इस प्रकार, रेखाखंड KP = KM + MP = AB + AB = 2 AB = 6 सेमी है।



आकृति 9.17

● ● ●

प्रश्नावली 9.2

1. निम्न उपकरणों प्रयोग करते हुए का प्रयोग आकृति 9.18 में दिए गए दोनों रेखाखडों को मापिए:

   (i) पटरी (ii) डिवाइडर



आकृति 9.18

2. निम्नलिखित वस्तुओं की लम्बाई तथा चौड़ाई या ऊँचाई सेंटीमीटरों में मापिए :

   (i) पोस्टकार्ड (ii) दरवाजा (iii) श्यामपट्ट

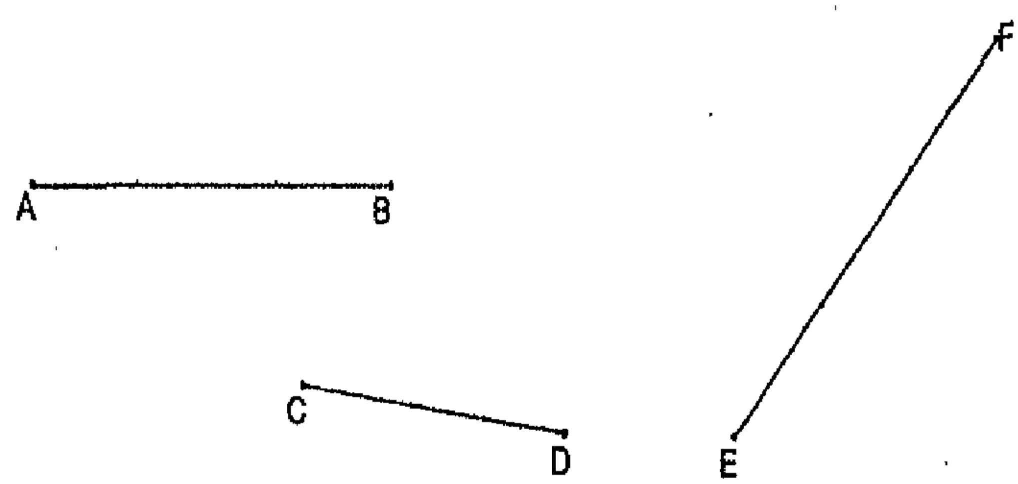
3. पटरी का प्रयोग कर, निम्नलिखित लम्बाइयों के रेखाखंडों की रचना कीजिए :

   (i) 3.5 सेमी (ii) 4.8 सेमी (iii) 5.2 सेमी

4. परकार की सहायता से, निम्नलिखित लम्बाइयों वाले रेखाखंडों की रचना कीजिए:

   (i) 6.4 सेमी (ii) 4.7 सेमी (iii) 5.6 सेमी

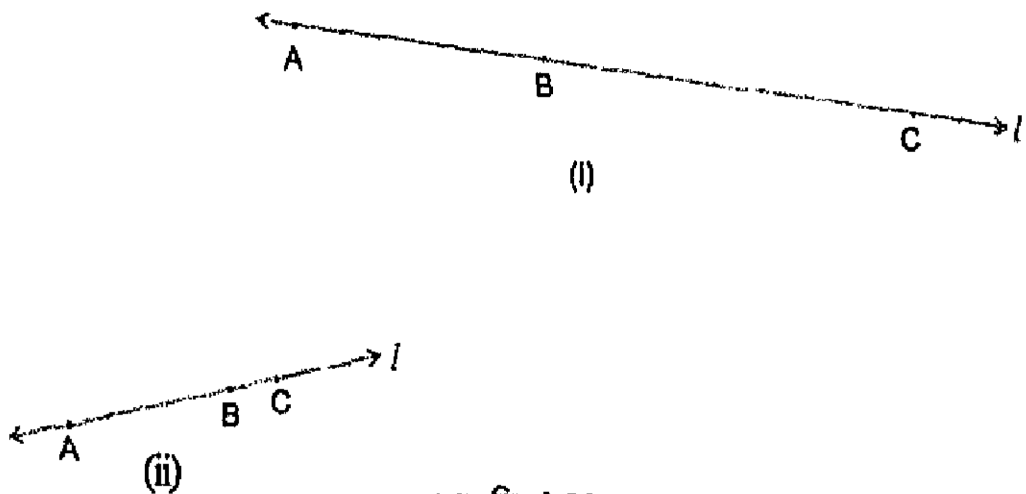
5. आकृति 9.19 में दिए गए रेखाखंडों के बराबर लम्बाइयों वाले रेखाखंडों की रचना कीजिए तथा इनका मापन कीजिए।



आकृति 9.19

6. आकृति 9.20 [(i) व (ii)] में, बिन्दु B रेखा l पर A व C के बीच स्थित है। सत्यापन कीजिए:

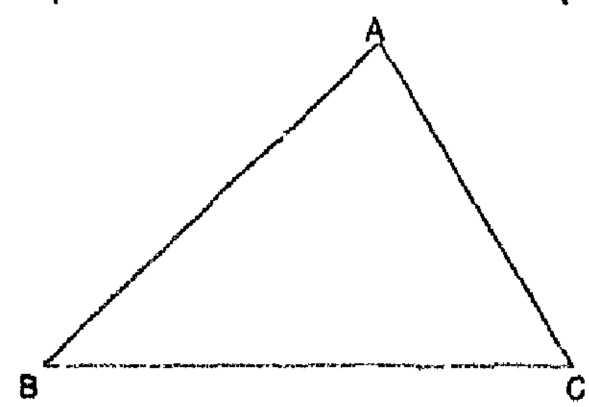
(i) AB + BC = AC (ii) AC - BC = AB



आकृति 9.20

7. अपनी अभ्यास पुस्तिका में 8 सेमी लम्बा एक रेखाखंड बनाइए। इस रेखाखंड में से 4.3 सेमी लम्बाई का रेखाखंड AC काटिए। शेष बचे रेखाखंड को मापिए।

8. परकार की सहायता से एक रेखाखंड की रचना कीजिए जिसकी लम्बाई आकृति 9.21 में दिए हुए रेखाखंडों AB व AC की लम्बाइयों के योग के बराबर हो। डिवाइडर की सहायता से इस रचना की जाँच कीजिए।



आकृति 9.21

9. एक रेखाखंड की रचना कीजिए जिसकी लम्बाई रेखाखंड AB = 3.9 सेमी से दुगुनी हो।

10. यदि AB = 5.8 सेमी तथा CD = 3.4 सेमी है, तो एक ऐसे रेखाखंड की रचना कीजिए जिसकी लम्बाई AB व CD की लम्बाइयों का अन्तर हो।

11. यदि AB = 4.5 सेमी तथा CD = 3 सेमी है, तो उन रेखाखंडों की रचना कीजिए जिनकी लम्बाइयाँ हैं :

(i) 2AB (ii) 3 CD (iii) AB + 2 CD (iv) AB − CD (v) 2 CD − AB

याद रखने योग्य बातें

1. रेखाखंड रेखा का एक भाग होता है।

2. एक रेखाखंड के दो अन्त बिन्दु होते हैं, परन्तु रेखा का कोई अन्त बिन्दु नहीं होता।

3. दो बिन्दुओं A व B को जोड़ने वाला केवल एक ही रेखाखंड होता है। इसे $\overline{AB}$ से व्यक्त किया जाता है।

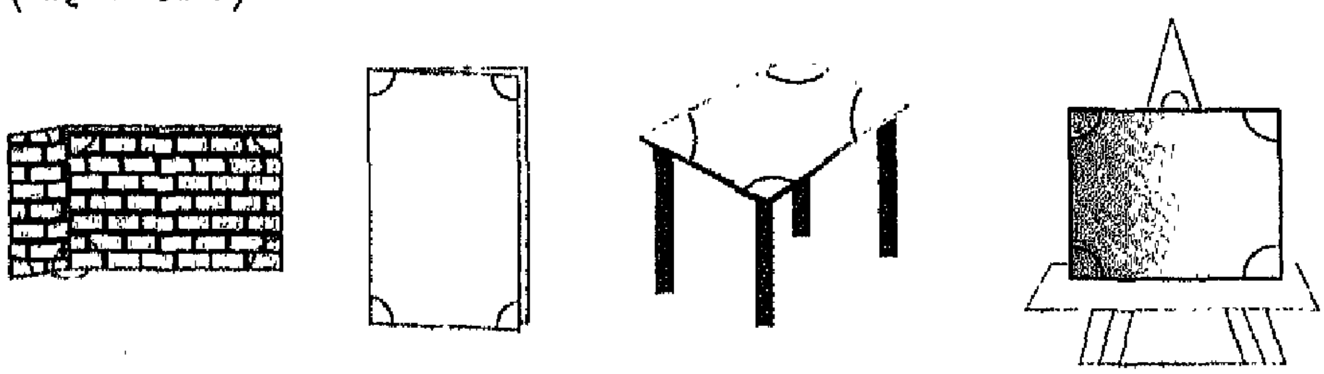
4. रेखाखंड AB की लम्बाई को AB से व्यक्त किया जाता है।

कोण

अध्याय 10

10.1 भूमिका

अपने चारों ओर देखिए। क्या आपने ध्यान दिया है कि जब भी दो रेखाएँ मिलती हैं, वे एक कोण बनाती हैं? उदाहरण के लिए आप कमरे की दीवारों के किनारों को देखिए, दरवाजे, मेज, श्यामपट्ट के सिरों को देखिए। अपनी अभ्यास पुस्तिका व पुस्तक के किनारों को देखिए। ये सभी कोण बनाते हैं (आकृति 10.1)।

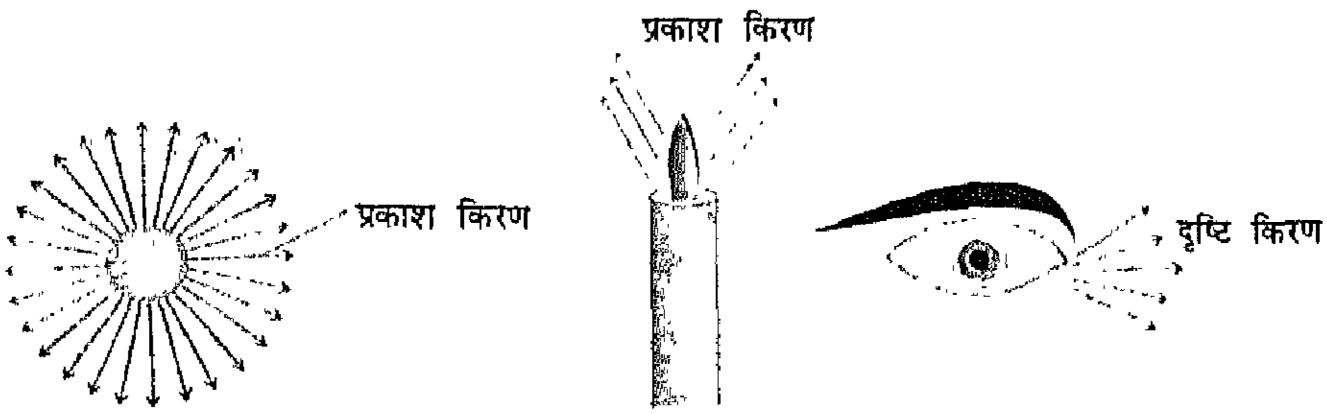


आकृति 10.1

अनेक भौतिक परिस्थितियों में कोण की अवधारणा का बहुत महत्व है। उदाहरण के लिए, किसी स्थान पर गर्मी की गहनता इस बात पर निर्भर करती है कि सूर्य की किरणें उस स्थान पर कितना कोण बनाती हैं। किसी भी वस्तु का आकार जो हमें दृष्टिगोचर होता है इस बात पर निर्भर करता है कि वह वस्तु हमारी आँख पर कितना कोण बनाती है इत्यादि। इस अध्याय में, हम कोण और उससे संबंधित कुछ गुणों के बारे में अध्ययन करेंगे।

10.2 किरण

क्या आपने कभी सूर्य से निकलने वाली प्रकाश किरणों [आकृति 10.2(i)], जलती हुई मोमबत्ती से निकलने वाली प्रकाश किरणों [आकृति 10.2(ii)], या दृष्टि किरणों [आकृति 10.2(iii)] के बारे में सुना है?



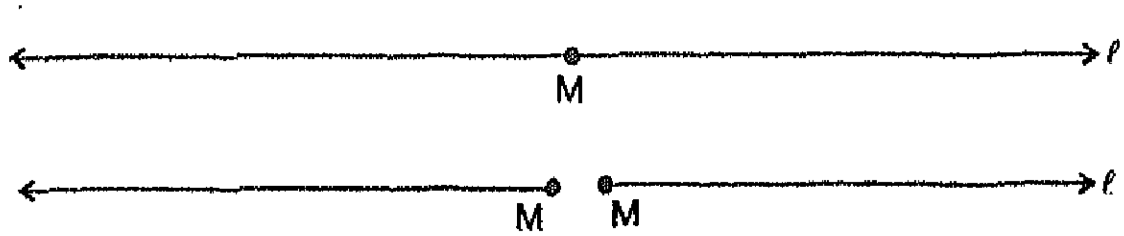
(i) (ii) (iii)

आकृति 10.2

प्रकाश की किरण सूर्य अथवा मोमबत्ती की लौ में स्थित एक बिन्दु से प्रारंभ होती है और एक ही दिशा में अपरिमित रूप से विस्तृत होती है। इसी प्रकार, दृष्टि किरण आँख के एक बिन्दु से प्रारंभ होकर एक ही दिशा में अपरिमित रूप से विस्तृत होती है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

किरण एक बिन्दु से प्रारंभ होती है और एक ही दिशा में अपरिमित रूप से विस्तृत होती है।

आइए एक रेखा *l* पर विचार करें। इस रेखा पर एक बिन्दु M अंकित कीजिए। यह बिन्दु M रेखा *l* को दो भागों में विभाजित करता है। *l* का प्रत्येक भाग बिन्दु M के साथ मिलकर एक *किरण (ray)* का निर्माण करता है (आकृति 10.3)। इस प्रकार बिन्दु M तथा इसके एक ओर के सभी बिन्दुओं को मिला कर एक किरण बनती है तथा दूसरी किरण में बिन्दु M तथा M के दूसरी ओर के सभी बिन्दु सम्मिलित हैं। यह बिन्दु M किरण का ***प्रारंभिक बिन्दु*** *(initial point)* कहलाता है।



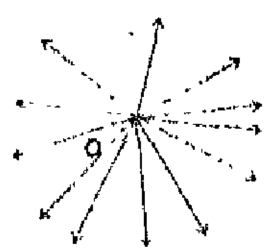
आकृति 10.3

अत: ***किरण रेखा का केवल एक अन्त बिन्दु, मान लीजिए O, वाला भाग है। यह केवल एक ही दिशा में अपरिमित रूप से विस्तृत होता है।***

अन्त बिन्दु O को किरण का प्रारंभिक बिन्दु कहते हैं।

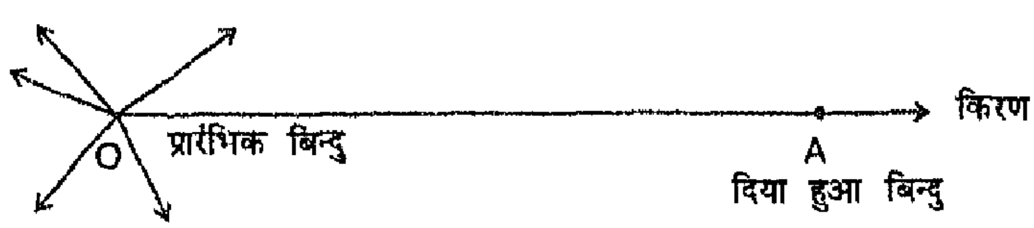
टिप्पणी: जिस प्रकार रेखा को हम कागज पर संपूर्ण रूप में नहीं खींच सकते, उसी प्रकार एक किरण को भी कागज पर पूरी तरह नहीं खींचा जा सकता। हम केवल किरण के एक भाग को ही खींचते हैं और उसी को पूरी किरण मान लेते हैं।

क्रियाकलाप 1: कागज पर एक बिन्दु O अंकित कीजिए। O को प्रारंभिक बिन्दु लेकर एक किरण खींचिए। क्या O को प्रारंभिक बिन्दु रखते हुए कोई दूसरी किरण भी खींची जा सकती है? स्पष्ट है कि इस प्रकार की जितनी चाहें उतनी किरणें खींची जा सकती हैं (आकृति 10.4)। इस प्रकार हम देखते हैं कि *एक दिए हुए बिन्दु को प्रारंभिक बिन्दु मानते हुए असंख्य किरणें खींची जा सकती हैं।*



आकृति 10.4

क्रियाकलाप 2 : अब हम देखते हैं कि एक दिए हुए बिन्दु O को प्रारंभिक बिन्दु मान कर तथा एक दिए हुए बिन्दु A से होकर जाने वाली कितनी किरणें खींची जा सकती हैं। बिन्दु O को A से मिलाते हुए एक किरण आकृति 10.5 में दर्शाए अनुसार खींचिए। क्या इस प्रकार की कोई और किरण खींची जा सकती है जिसका O प्रारंभिक बिन्दु है तथा जो A से होकर जाती है? प्रयास करने पर हम पाते हैं कि इस प्रकार की किसी और किरण की रचना असंभव है।

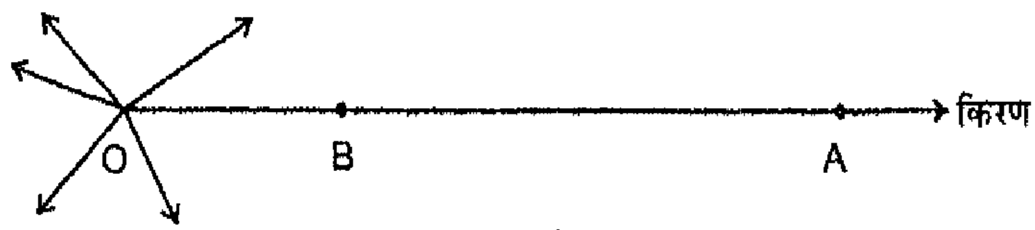


आकृति 10.5

अत: ***ऐसी केवल एक ही किरण है जिसका प्रारंभिक बिन्दु O है तथा जो एक दिए हुए बिन्दु A से होकर जाती है।***

आइए आकृति 10.5 में खींची गई किरण पर एक अन्य बिन्दु B लें जैसा

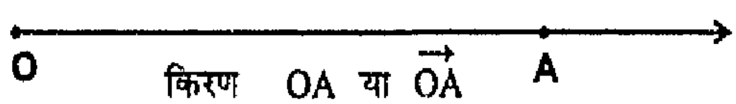
कि आकृति 10.6 में दर्शाया गया है। क्या प्रारंभिक बिन्दु O को लेकर बिन्दु B से होकर जाती हुई नई किरण पहले वाली उस किरण के समान है जिसका प्रारम्भिक बिन्दु O है तथा जो A से होकर जाती है? हाँ। दोनों किरणें समान हैं। अतः



आकृति 10.6

एक किरण पूर्णतया निर्धारित हो जाती है, यदि उसका प्रारंभिक बिन्दु और उस किरण पर स्थित एक अन्य बिन्दु ज्ञात है।

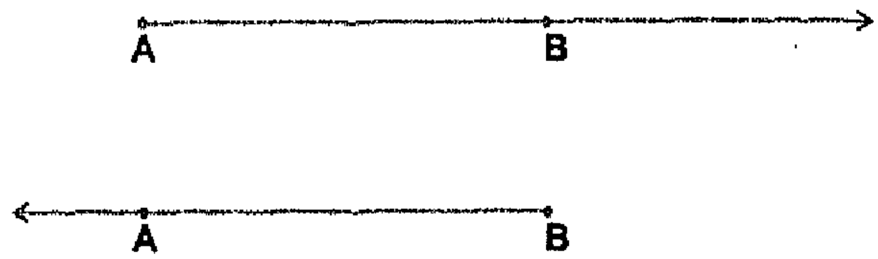
चूँकि प्रारंभिक बिन्दु और किरण पर स्थित एक अन्य बिन्दु से एक अद्वितीय किरण निर्धारित होती है, इसलिए इस आधार पर हम किरण का नामांकन करते हैं। प्रारंभिक बिन्दु O वाली तथा बिन्दु A से होकर जाने वाली किरण को नाम देते हैं: 'किरण OA'। संकेतन में, इस किरण को $\overrightarrow{OA}$ लिखते हैं (आकृति 10.7)।



आकृति 10.7

• ध्यान रहे कि किरण के नामांकन में प्रारंभिक बिन्दु को पहले लिखते हैं। इस प्रकार यदि हम 'किरण PQ' लिखते हैं, तो इस किरण का प्रारंभिक बिन्दु P है, Q नहीं।

हम जानते हैं कि रेखा AB तथा रेखा BA समान हैं। इसी प्रकार, रेखाखंड AB व रेखाखंड BA में कोई अंतर नहीं है। क्या इसी प्रकार 'किरण AB' व किरण BA भी एक ही हैं? आकृति 10.8 में खींची गई किरण AB तथा किरण BA का अवलोकन कीजिए।



आकृति 10.8

स्पष्टतया प्रारंभिक बिन्दु A वाली किरण AB तथा प्रारंभिक बिन्दु B वाली किरण BA अलग-अलग किरणें हैं। ध्यान दीजिए कि इन दोनों किरणों में बिन्दुओं A व B की स्थितियों में कोई अन्तर नहीं है। इस प्रकार, हम पाते हैं कि

किरण AB तथा किरण BA दो भिन्न किरणें हैं।

टिप्पणी : संकेतन में, रेखा AB को $\overleftrightarrow{AB}$, किरण $\overrightarrow{AB}$ को AB, रेखाखंड AB को $\overline{AB}$ तथा रेखाखंड AB की लम्बाई को AB से प्रदर्शित किया जाता है। परन्तु प्राय: इन चारों को एक ही संकेतन AB से प्रदर्शित किया जाता है। यह संदर्भ से स्पष्ट हो जाता है कि इसका प्रयोग चारों में से किसके लिए किया गया है।

अब एक रेखा l खींचिए। इस रेखा पर बिन्दु O अंकित कीजिए। जिस प्रकार आकृति 10.9 में दर्शाया गया है, इस बिन्दु की विपरीत दिशाओं में दो बिन्दु A व B अंकित कीजिए।



आकृति 10.9

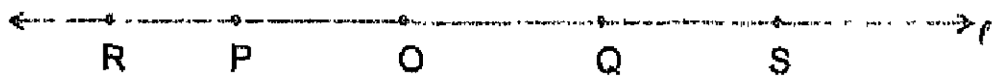
इस प्रकार, हमें दो किरणें OA तथा OB प्राप्त होती हैं जिनका प्रारंभिक बिन्दु एक ही है, परन्तु वे दो विपरीत दिशाओं में विस्तृत हैं। ऐसी किरणों को ***विपरीत किरणें*** *(opposite rays)* कहते हैं।

उदाहरण 1:

(i) आकृति 10.10 में दिखाई गईं उन सभी किरणों के नाम लिखिए जिनके प्रारंभिक बिन्दु क्रमशः O, P व Q हैं।

(ii) क्या किरण OR, किरण OP से भिन्न है?

(iii) क्या किरण PQ, किरण PR से भिन्न है?



आकृति 10.10

हल:

(i) प्रारंभिक बिन्दु O वाली किरणें हैं : OP, OR, OQ व OS।

प्रारंभिक बिन्दु P वाली किरणें हैं: PR, PO, PQ व PS।

इसी प्रकार, प्रारंभिक बिन्दु Q वाली किरणें हैं : QS, QO, QP व QR।

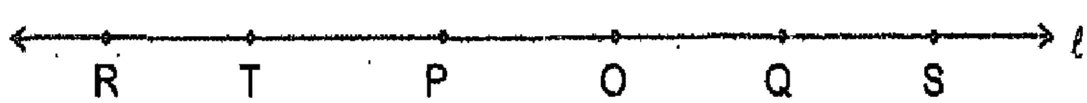
(ii) किरणें OR तथा OP समान हैं, क्योंकि दोनों के प्रारंभिक बिन्दु एक ही हैं तथा दोनों एक ही दिशा में अपरिमित रूप से विस्तृत हैं।

(iii) किरणें PQ तथा PR भिन्न किरणें हैं, क्योंकि इनके प्रारंभिक बिन्दु तो समान हैं परन्तु ये अलग-अलग दिशाओं में विस्तृत हैं।

प्रश्नावली 10.1

1. एक किरण की रचना कीजिए जिसका प्रारंभिक बिन्दु P है तथा जो बिन्दु Q से होकर जाती है।
2. निम्न किरणों के प्रारंभिक बिन्दु बताइए:

   (i) PQ (ii) CP (iii) YZ
3. (i) आकृति 10.11 में प्रदर्शित उन सभी किरणों के नाम लिखिए जिनके प्रारम्भिक बिन्दु क्रमशः O, P, Q व T हैं।

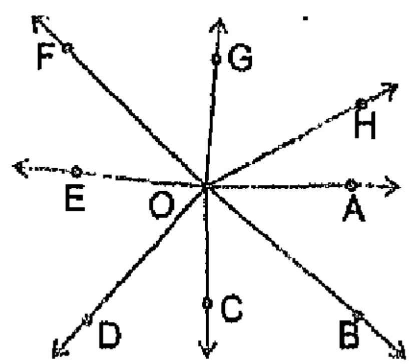


आकृति 10.11

(ii) क्या किरण TQ, किरण TP से भिन्न है?

(iii) क्या किरण OT, किरण OQ से भिन्न है?

4. आकृति 10.12 में कितनी किरणें निरूपित हैं? उनके नाम लिखिए।

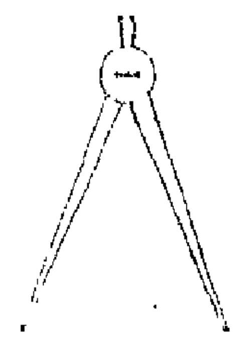


आकृति 10.12

5. एक रेखा, एक रेखाखंड व एक किरण में क्या अंतर है?

10.3 कोण

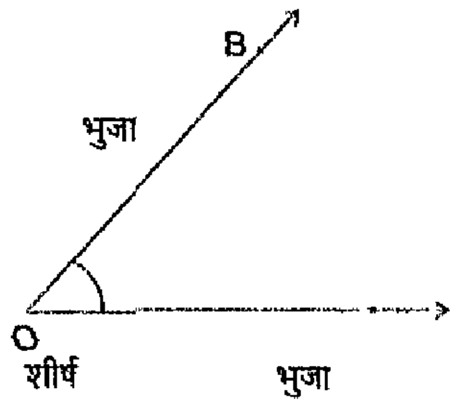
क्या आपने घड़ी की दोनों सुइयों, डिवाइडर की दोनों भुजाओं, कैंची के तेज फलों पर ध्यान दिया है? इन सभी में दो भुजाएँ होती हैं जो एक कब्जे से जुड़ी होती हैं। ये सभी हमें ***कोण (angle)*** का आभास कराती हैं।



आकृति 10.13

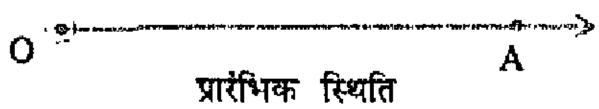
यदि हम कब्जे को प्रारंभिक बिन्दु तथा दोनों भुजाओं को दो किरणें मान लें, तो कोण की अवधारणा इस प्रकार होगी :

कोण एक ऐसी आकृति है जो एक ही प्रारंभिक बिन्दु वाली दो किरणों से बनती है। उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु O कोण का ***शीर्ष (vertex)*** कहलाता है तथा कोण को बनाने वाली दोनों किरणें OA तथा OB कोण की ***भुजाएँ (arms या sides)*** कहलाती हैं (आकृति 10.14)। भुजाओं को प्रायः शीर्ष के निकट एक वृत्तीय चाप द्वारा जोड़ दिया जाता है, जैसा आकृति 10.14 में दिखाया गया है।



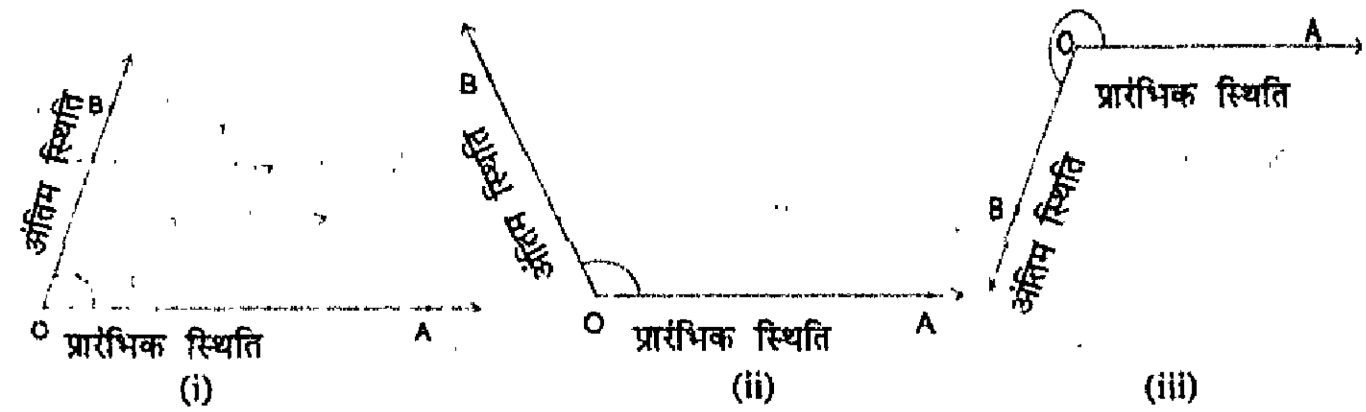
आकृति 10.14

क्रियाकलाप 3 : एक धागे का टुकड़ा लीजिए। एक ड्राइंग पिन की सहायता से धागे के एक सिरे को ड्राइंग बोर्ड पर स्थिर कीजिए (आकृति 10.15)। धागे के दूसरे



आकृति 10.15

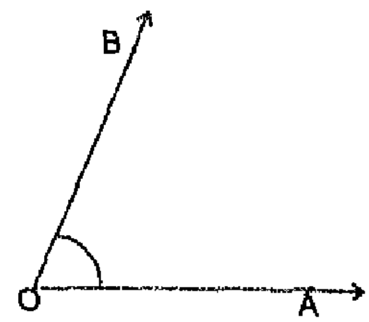
सिरे को हाथ से पकड़ कर तथा आकृति 10.16 (i) में दिखाई गई प्रारंभिक स्थिति OA से शुरू कर घड़ी के घूमने की उल्टी दिशा में घूर्णन देना आरंभ कीजिए। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि जैसे-जैसे घूर्णन करते हैं, धागे की स्थिति प्रारंभिक स्थिति OA के साथ एक कोण बनाती चलती है। इस प्रकार, हम कह सकते है कि प्रारंभिक स्थिति को स्थिर रखते हुए यदि एक किरण घूमती है, तो एक कोण बनता है (आकृति 10.16)।



आकृति 10.16

10.3.1 कोण के लिए संकेतन

एक कोण को व्यक्त करने के लिए, हम चिह्न '∠' का प्रयोग करते हैं। किरणों OA व OB द्वारा निर्मित कोण (आकृति 10.17) को ∠AOB या ∠BOA से दर्शाते हैं और इसे 'कोण AOB' या 'कोण BOA' पढ़ते हैं।



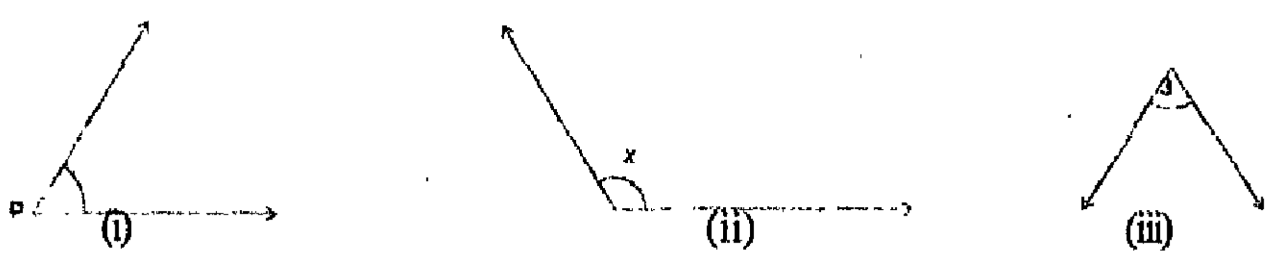
आकृति 10.17

ध्यान दीजिए कि

(i) ∠AOB वही है जो ∠BOA है।

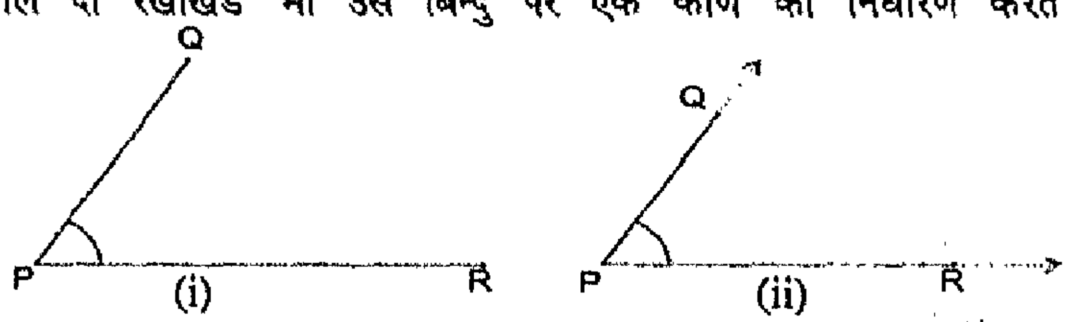
(ii) कोण को प्रदर्शित करते समय कोण के शीर्ष को मध्य में लिखा जाता है।

कभी-कभी कोण केवल ∠P या 'कोण P' के रूप में ही व्यक्त किया जाता है [आकृति 10.18(i)]। कभी-कभी कोण को निरूपित करने के लिए अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर x, y, z आदि का प्रयोग किया जाता है [आकृति 10.18(ii)]। कभी-कभी इसके लिए संख्याएँ 1, 2, 3,...आदि भी प्रयोग में लाई जाती हैं [आकृति 10.18 (iii)]।



आकृति 10.18

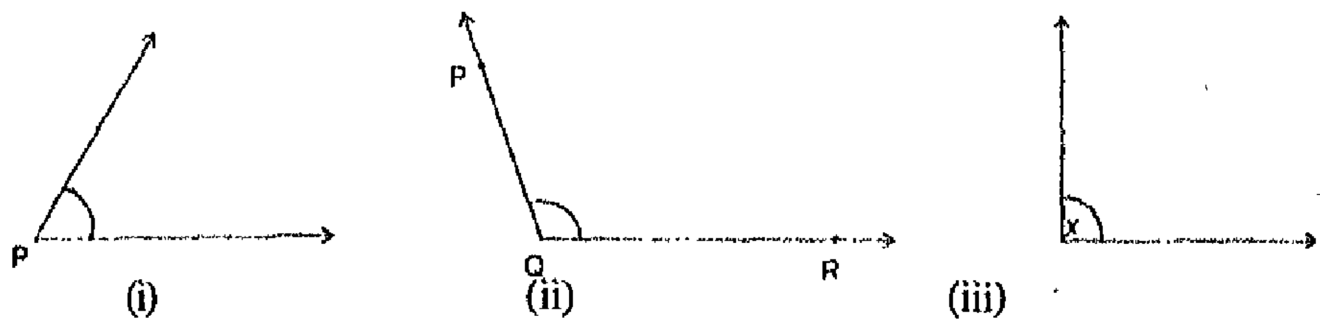
टिप्पणी : बहुत बार हमें आकृति 10.19(i) के समान एक उभयनिष्ठ अन्त बिन्दु P वाले रेखाखंड PQ व PR प्राप्त होते हैं। तब हम कहते हैं कि रेखाखंडों PQ व PR द्वारा बिन्दु P पर एक कोण का निर्धारण हुआ है। इस प्रकार एक उभयनिष्ठ अन्त बिन्दु वाले दो रेखाखंड भी उस बिन्दु पर एक कोण का निर्धारण करते हैं।



आकृति 10.19

वास्तव में, यहाँ कोण रेखाखंडों द्वारा जनित किरणों से बनता है [आकृति 10.19(ii)]। परन्तु कोण के संदर्भ में हम किरण व रेखाखंड के अन्तर पर बहुत ध्यान नहीं देंगे।

उदाहरण 2: निम्न कोणों के नाम लिखिए:

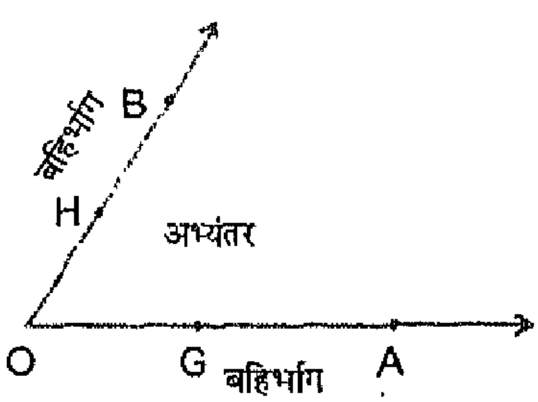


आकृति 10.20

हल : (i) ∠P (ii) ∠PQR या ∠RQP या ∠Q (iii) ∠ *xL*

10.3.2 कोण के अभ्यंतर एवं बहिर्भाग

एक किरण OA लीजिए। बिन्दु O को स्थिर रखते हुए तथा भुजा OA को घुमाते हुए आकृति 10.21 में दर्शाई गई स्थिति OB तक लाइए। जैसे-जैसे भुजा OA घूमती है और OB तक जाती है, वह तल के एक भाग को आच्छादित करती जाती है। आकृति 10.21 में इस भाग को छायांकित किया गया है।



आकृति 10.21

इसी भाग के सभी बिन्दुओं को मिलाकर ∠AOB का ***अभ्यंतर*** *(interior)* बनता है। कुछ बिन्दु जैसे G, H, O, A, B आदि ∠AOB की भुजाओं पर स्थित हैं। तल के वे सभी बिन्दु, जो न तो ∠AOB के अभ्यंतर में हैं और न ही ∠AOB की भुजाओं पर, मिलकर ∠AOB का ***बहिर्भाग*** *(exterior)* बनाते हैं। ध्यान दीजिए कि कोण अपने अभ्यंतर को बहिर्भाग से अलग करता है।

कोण ∠AOB व इसके अभ्यंतर को मिलाने से प्राप्त क्षेत्र को ***कोणीय क्षेत्र*** *(angular region)* AOB *कहते हैं।*

उदाहरण 3 : आकृति 10.22 में कितने कोण दिखाए गए हैं? उनके नाम लिखिए।

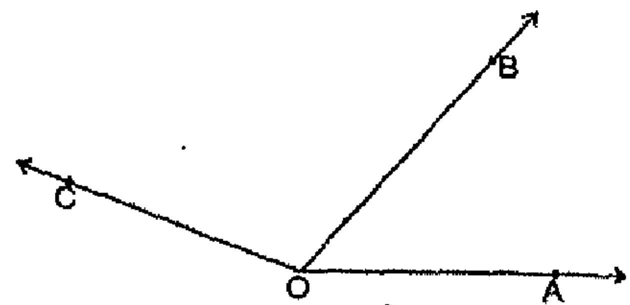
हल : यहाँ तीन कोण बने हैं जिनके नाम हैं: ∠COB, ∠BOA और ∠COA।

बताइए जो स्थित हैं:

(i) ∠AOB के अभ्यंतर में,

(ii) ∠AOB के बहिर्भाग में,

(iii) ∠AOB पर।



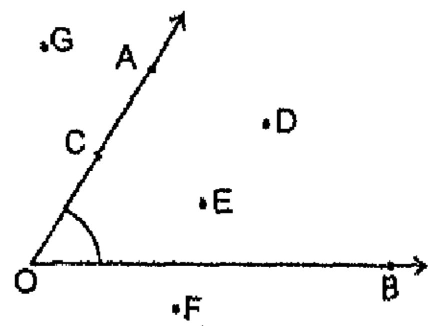
आकृति 10.22

उदाहरण 4 : आकृति 10.23 में उन बिन्दुओं के नाम

(i) ∠AOB के अभ्यंतर में,

(ii) ∠AOB के बहिर्भाग में,

(iii) ∠AOB पर।



आकृति 10.23

हल :

(i) बिन्दु D व E।

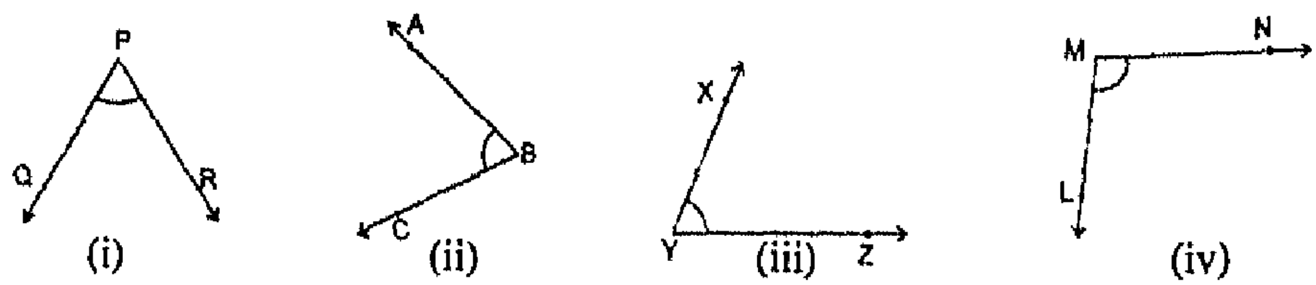
(ii) बिन्दु F व G।

(iii) बिन्दु A, C, O व B।

●●●

प्रश्नावली 10.2

1. अपने पर्यावरण से कोणों के तीन उदाहरण दीजिए।
2. निम्न कोणों के शीर्ष एवं भुजाओं के नाम लिखिए:

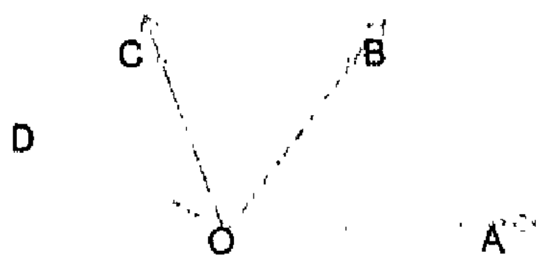


आकृति 10.24

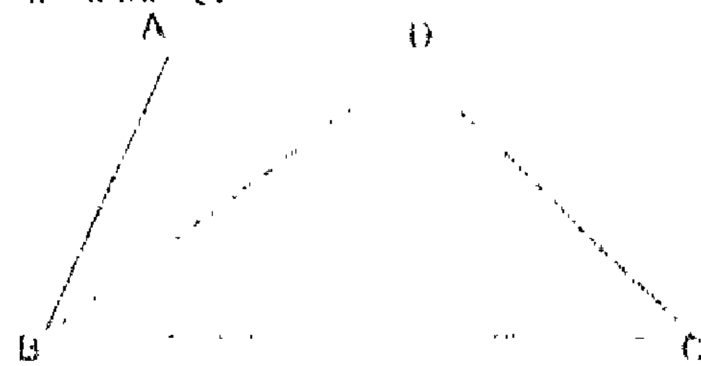
3. ∠CBD, ∠PQR, ∠MLN और ∠OPQ को दर्शाते हुए कोण बनाइए।

4. आकृति 10.25 में कितने कोण दर्शाए गए हैं? उनके नाम लिखिए।

5. आकृति 10.26 में दर्शाए गए कोणों के नाम लिखिए। इनमें से कितने कोण केवल शीर्ष का प्रयोग करते हुए दर्शाए जा सकते हैं।



आकृति 10.25



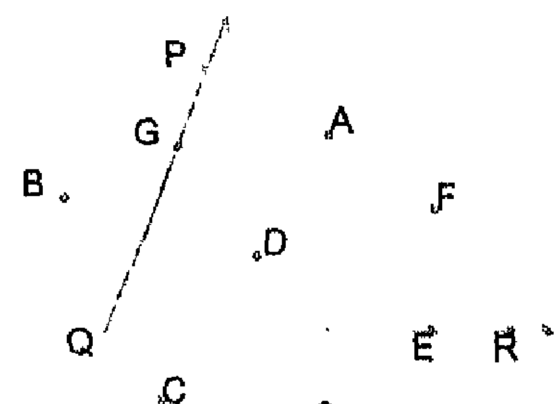
आकृति 10.26

6. आकृति 10.27 में अंकित उन बिन्दुओं के नाम लिखिए जो स्थित हैं:

   (i) ∠ PQR के अभ्यंतर में;

   (ii) ∠ PQR के बहिर्भाग में;

   (iii) ∠ PQR पर ।



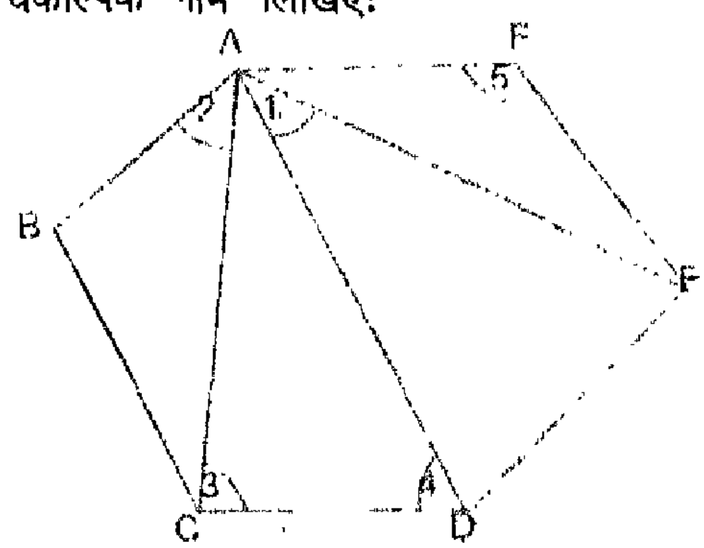
आकृति 10.27

7. आकृति 10.28 में निम्न कोणों के वैकल्पिक नाम लिखिए:

   (i) ∠1 (ii) ∠2

   (iii) ∠3 (iv) ∠4

   (v) ∠5



आकृति 10.28

8. आकृति 10.29 में क्या

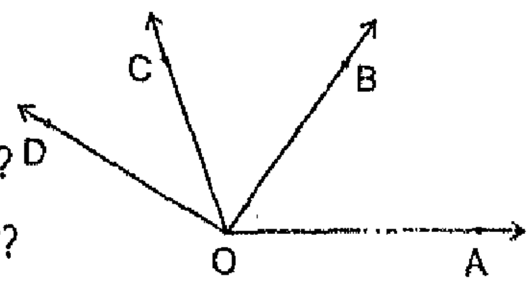
(i) बिन्दु B, ∠AOB के अभ्यंतर में है?

(ii) बिन्दु B, ∠AOC के अभ्यंतर में है?

(iii) बिन्दु C, ∠AOB के बहिर्भाग में है?

(iv) बिन्दु D, ∠AOC के बहिर्भाग में है?

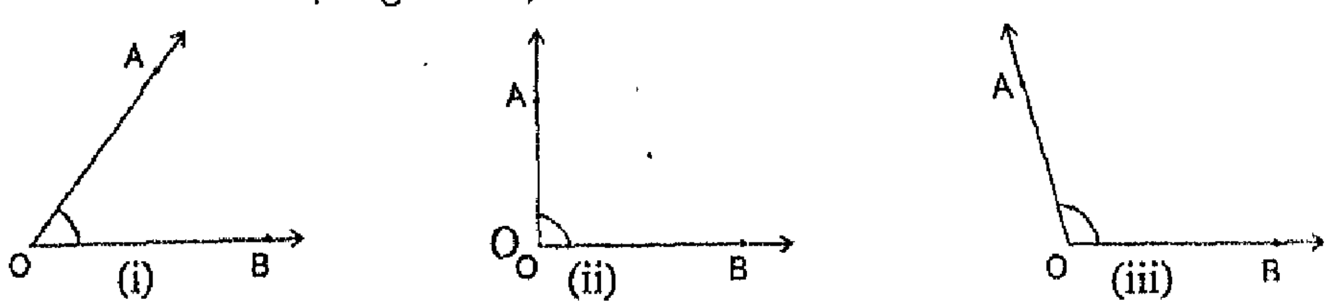
(v) बिन्दु A, ∠AOD के अभ्यंतर में है?



आकृति 10.29

10.3.3 कोण का परिमाण

आइए ∠AOB पर विचार करें (आकृति 10.30)। हम OB से OA तक के घुमाव को कम या अधिक कर भुजाओं OA और OB के बीच के झुकाव या फैलाव को बदल सकते हैं। दोनों भुजाओं के बीच के झुकाव या फैलाव की यह मात्रा ही कोण का *परिमाण (magnitude)* होती है।

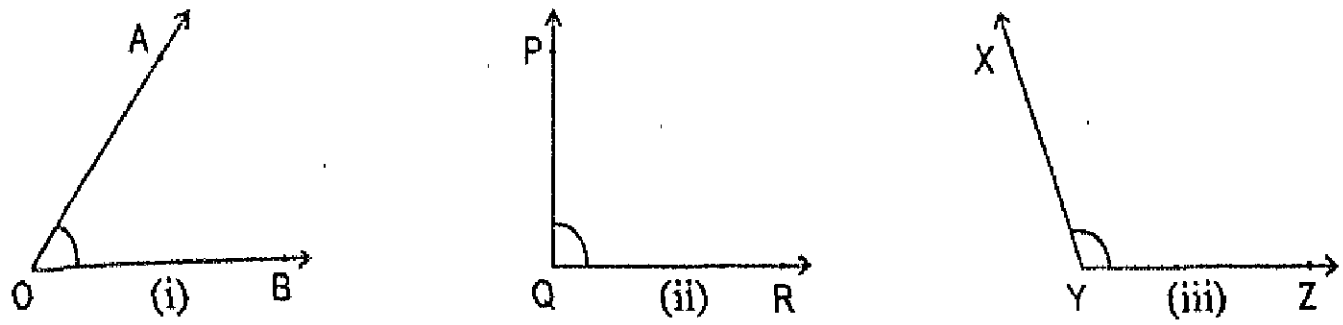


आकृति 10.30

इस प्रकार यदि दो कोणों की भुजाओं का झुकाव या फैलाव अलग-अलग है, तो हम कहते हैं कि इन दोनों कोणों का *परिमाण* या *माप (measure)* अलग-अलग है।

यदि एक कोण का परिमाण दूसरे कोण के परिमाण से अधिक है, तो हम कहते हैं कि पहला कोण दूसरे कोण से बड़ा है या दूसरा कोण पहले कोण से छोटा है।

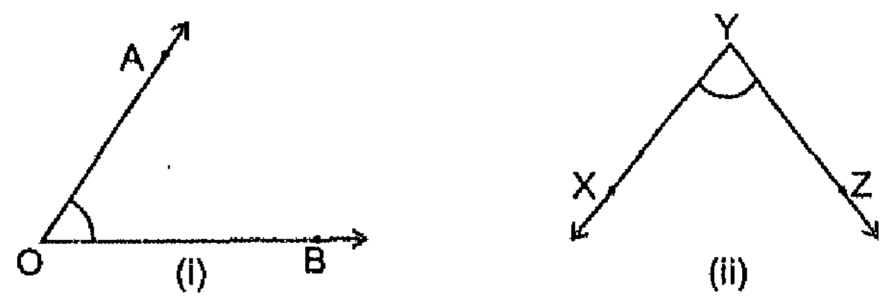
कभी कभी हम केवल देख कर ही बता सकते हैं कि कौन सा कोण बड़ा है। उदाहरण के लिए आकृति 10.31 में दिए गए कोणों पर विचार कीजिए।



आकृति 10.31

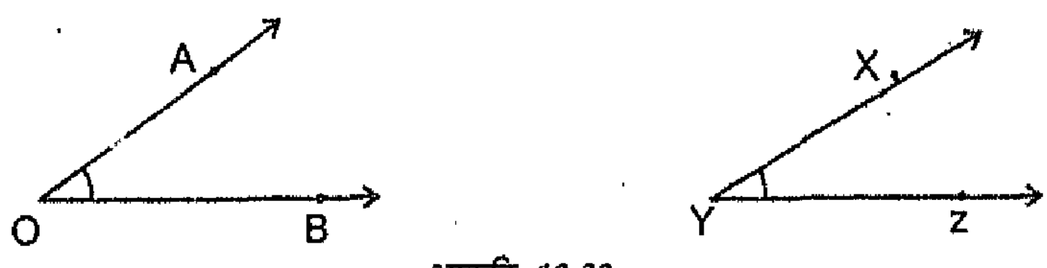
केवल देखने मात्र से ही हम कह सकते हैं कि ∠AOB, ∠PQR व ∠XYZ दोनों से छोटा है। इसी प्रकार ∠PQR, ∠AOB से बड़ा तथा ∠XYZ से छोटा है।

अब आकृति 10.32 पर विचार कीजिए :



आकृति 10.32

क्या आप देख कर पता कर सकते हैं कि कौन सा कोण बड़ा है तथा कौन सा छोटा? स्पष्ट है कि केवल देखने मात्र से ही बड़े या छोटे कोण की पहचान सरल नहीं है। एक अक्स कागज का प्रयोग कर कोणों के परिमाण की तुलना करना एक उत्तम विधि है।

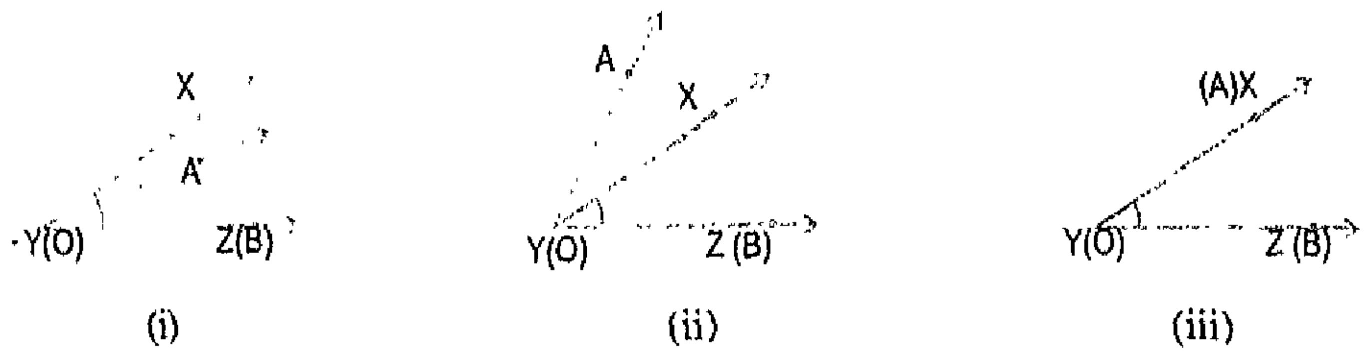


आकृति 10.33

आइए कोणों AOB व XYZ (आकृति 10.33) पर विचार करें। एक अक्स कागज पर∠AOB को अक्स करें तथा इसको ∠XYZ पर इस प्रकार रखें कि शीर्ष O शीर्ष Y पर तथा एक भुजा (जैसे OB) YZ के अनुदिश रहे। अब भुजा जैसे OA की स्थिति के लिए तीन संभावनाएँ हैं:

(i) भुजा OA भुजाओं YX व YZ के बीच में आती है [आकृति 10.34(i)]। इस स्थिति में, हम कहते हैं कि ∠AOB, ∠XYZ से छोटा है, क्योंकि ∠XYZ के बराबर करने के लिए कोण AOB की भुजा OA को और अधिक घुमाना पड़ेगा। संकेतन में हम इसे ∠AOB < ∠XYZ लिखते हैं।

(ii) भुजा OA भुजा YX से आगे है [आकृति 10.34 (ii)]। इस स्थिति में, हम कहते हैं कि ∠AOB, ∠XYZ से बड़ा है। संकेतन में हम इसे ∠AOB > ∠XYZ लिखते हैं।



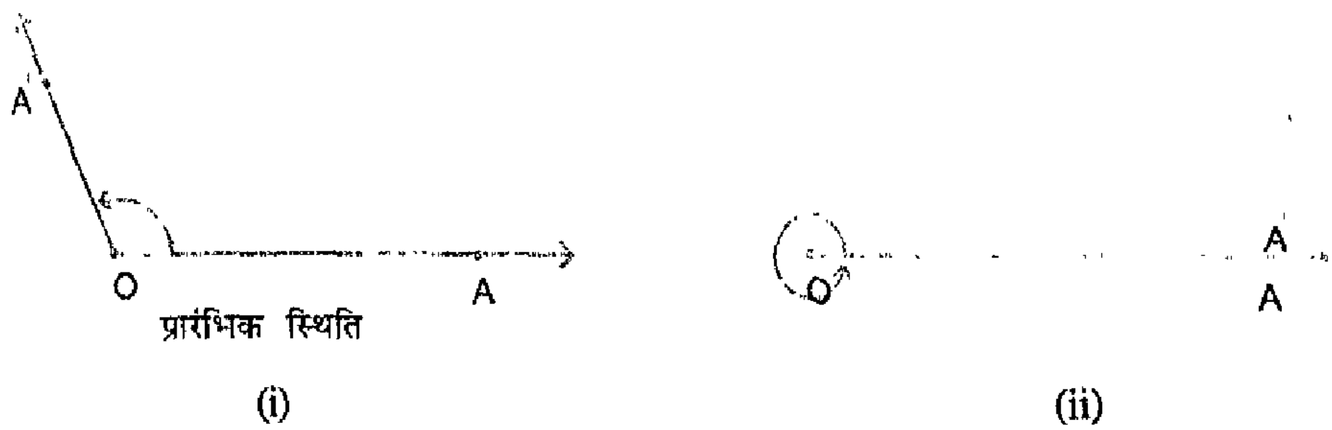
आकृति 10.34

(iii) भुजा OA भुजा YX के अनुदिश है [आकृति 10.34 (iii)]। इस स्थिति में, हम कहते हैं कि ∠AOB, ∠XYZ के बराबर है। संकेतन में हम इसे ∠AOB = ∠XYZ लिखते हैं।

कोणों की तुलना के लिए प्रयुक्त दोनों विधियाँ यह तो निर्धारित करती हैं कि कौन सा कोण बड़ा या छोटा है परन्तु दोनों में से कोई भी विधि यह नहीं बताती कि कोण कितना बड़ा या कितना छोटा है। इस बात का पता करने के लिए हम प्रत्येक कोण का एक संख्यात्मक मान ज्ञात करते हैं। दोनों कोणों के संख्यात्मक मान ज्ञात होने पर हम सरलता से जान सकते हैं कि कौन सा कोण बड़ा है तथा कितना बड़ा है। कोण का संख्यात्मक मान ज्ञात करने की अच्छी विधि यह होगी कि हम कोणों को एक *मानक कोण (standard angle)* (जिसे *मात्रक कोण* कहते हैं) के गुणजों के रूप में मापें और फिर इन मापों की तुलना करें।

10.3.4 कोण के अंश माप

एक किरण OA पर विचार कीजिए। बिन्दु O को स्थिर रख कर किरण को अपनी प्रारंभिक स्थिति से घुमाएँ, जैसे कि आकृति 10.35 (i) में दिखाया गया है।

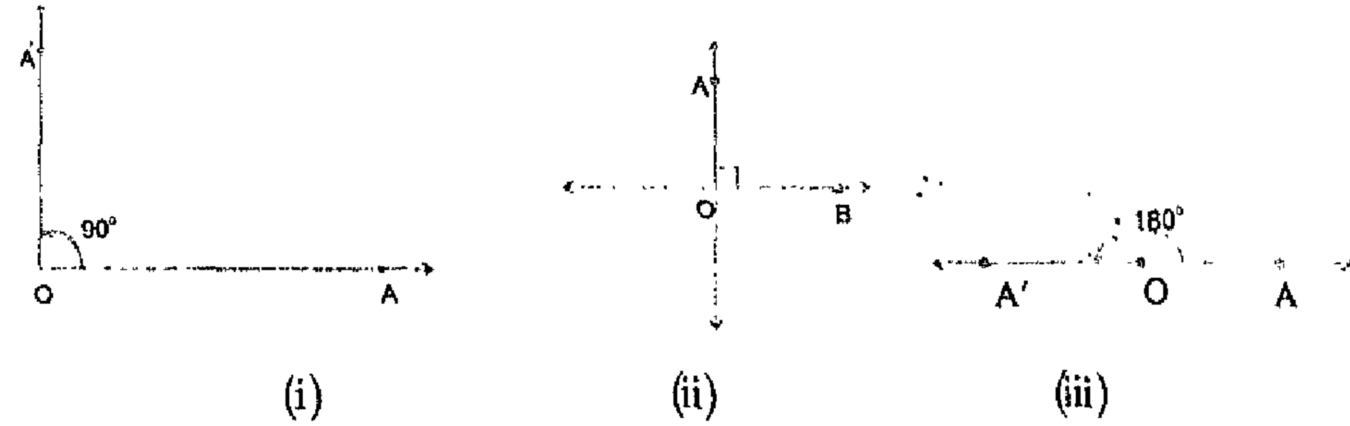


आकृति 10.35

जब किरण OA एक घूर्णन पूरा कर लेती है [आकृति 10.35(ii)] अर्थात् अपनी प्रारंभिक स्थिति के संपाती हो जाती है, तो हम कहते हैं कि किरण ने ***एक चक्कर*** पूरा कर लिया है। हम इस चक्कर (पूर्ण घूर्णन) को 360 भागों में विभाजित करते हैं। इनमें से प्रत्येक भाग को एक ***अंश (degree)*** कहते हैं और इसे ही हम कोण मापन का मौलिक मात्रक मानते हैं। अंश को छोटे वृत्त (o) से व्यक्त किया जाता है और इसे संख्या के ऊपर लिखा जाता है। इस प्रकार 1 अंश को 1° लिखा जाता है, 60 अंश को 60° लिखा जाता है और 90 अंश को 90° लिखा जाता है आदि।

इस प्रकार, एक चक्कर (पूर्ण घूर्णन) = 360°

यदि इस प्रकार किरण OA घूमते हुए चौथाई चक्कर ($\frac{1}{4}$ चक्कर) दिखाती है [आकृति 10.36 (i)], तो हम कहते हैं कि किरण $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ घूम गई है, अर्थात् इस कोण का माप 90° है।



आकृति 10.36

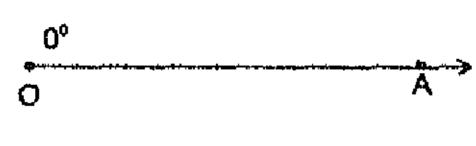
90° माप वाले कोण को एक ***समकोण*** *(right angle) कहते हैं।* जब कोण का माप 90° होता है, तो हम कहते हैं कि कोण की भुजाएँ या कोण बनाने वाली किरणें एक दूसरे पर *लम्ब (perpendicular)* हैं या एक दूसरे के साथ *समकोण पर* हैं। इस प्रकार आकृति 10.36 (ii) में किरणें OA व OB एक दूसरे पर लम्ब हैं। इस स्थिति में हम यह भी कहते हैं कि इन किरणों द्वारा निर्धारित रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब हैं।

इस प्रकार आकृति 10.36 (ii) में रेखा OA रेखा OB पर लम्ब है। इसी प्रकार, हम कहते हैं कि दो रेखाखंड, या एक किरण और एक रेखाखंड एक दूसरे पर लम्ब हैं यदि उनके द्वारा निर्मित रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब हैं। 'पर लम्ब है' स्थिति को दर्शाने के लिए संकेत $\perp$ का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार आकृति 10.36 (ii) में हम 'रेखा OA $\perp$ रेखा OB' लिखते हैं और इसे 'रेखा OA रेखा OB पर लम्ब है' पढ़ते हैं।

यदि किरण आधा चक्कर ($\frac{1}{2}$ चक्कर) लगाती है, जैसा कि आकृति 10.36 (iii) में दिखाया गया है, तो हम कहते हैं कि किरण OA, $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ का कोण घूम गई है।

180° माप वाले कोण को एक ऋजु कोण (straight angle) कहते हैं।





आकृति 10.37

जब किरण OA एक चक्कर पूरा कर लेती है, जैसा कि आकृति 10.37 (i) में दर्शाया गया है, तो हम कहते हैं कि किरण 360° के कोण पर घूम गई है।

360° माप वाले कोण को संपूर्ण कोण (complete angle) कहते हैं। यदि किरण OA घूमती ही नहीं है [आकृति 10.37(ii)], तो हम कहते हैं कि किरण 0° के कोण पर घूम गई है।

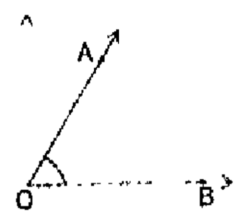
0° माप वाले कोण को शून्य कोण कहते हैं।

10.4 कोणों के प्रकार

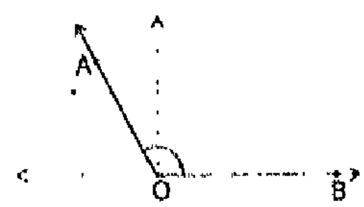
हम संपूर्ण कोण, समकोण, ऋजु कोण व शून्य कोण के बारे में पढ़ चुके हैं। अब हम कोणों के कुछ और प्रकारों का अध्ययन करेंगे।

न्यून कोण: वह कोण जो शून्य कोण से बड़ा तथा समकोण से छोटा होता है, *न्यून कोण (acute angle)* कहलाता है (आकृति 10.38)।

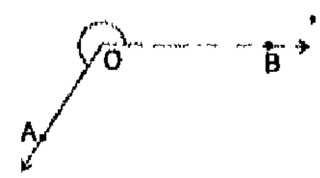
अर्थात् न्यून कोण वह कोण है जिसका माप 0° *से बड़ा तथा* 90° *से कम होता है।*



आकृति 10.38



आकृति 10.39



आकृति 10.40

अधिक कोण: वह कोण जो समकोण से बड़ा तथा ऋजु कोण से छोटा होता है, *अधिक कोण (obtuse angle)* कहलाता है (आकृति 10.39)। अर्थात् ***अधिक कोण वह कोण है जिसका माप* 90° *से अधिक तथा* 180° *से कम होता है।***

प्रतिवर्ती कोण: वह कोण जो एक ऋजु कोण से बड़ा तथा संपूर्ण कोण से छोटा होता है, *प्रतिवर्ती कोण (reflex angle)* कहलाता है (आकृति 10.40)। अर्थात्

प्रतिवर्ती कोण वह कोण है जिसका माप 180° *से अधिक तथा* 360° *से कम होता है।*

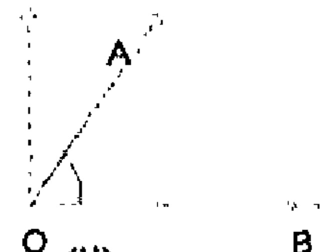
इस प्रकार कोणों के प्रकार का सार है:

(i) शून्य कोण = 0°



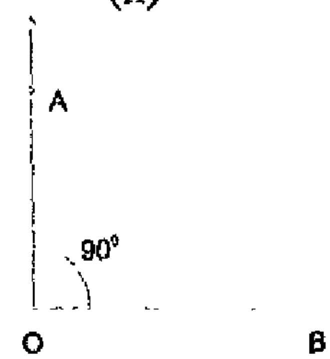
(i)

(ii) न्यून कोण = 0° और 90° के बीच



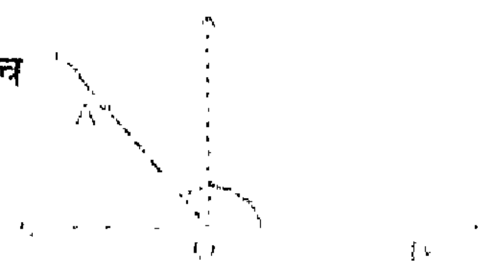
(ii)

(iii) समकोण = $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$



(iii)

(iv) अधिक कोण = 90° और 180° के बीच



(iv)

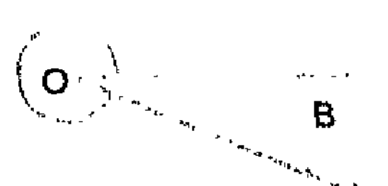
(v) ऋजु कोण = $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

$= 2 \times 90^\circ = 2$ समकोण



(v)

(vi) प्रतिवर्ती कोण = 180° और 360° के बीच



(vi)

(vii) संपूर्ण कोण = 360°

$= 4 \times 90^\circ = 4$ समकोण

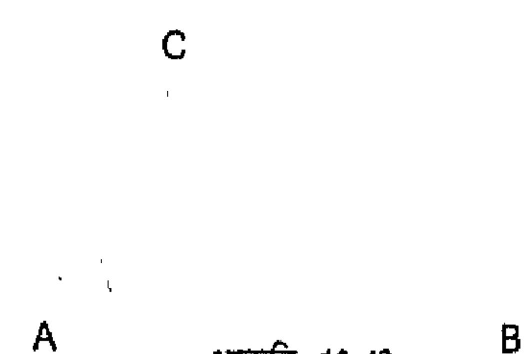


(vii)

आकृति 10.41

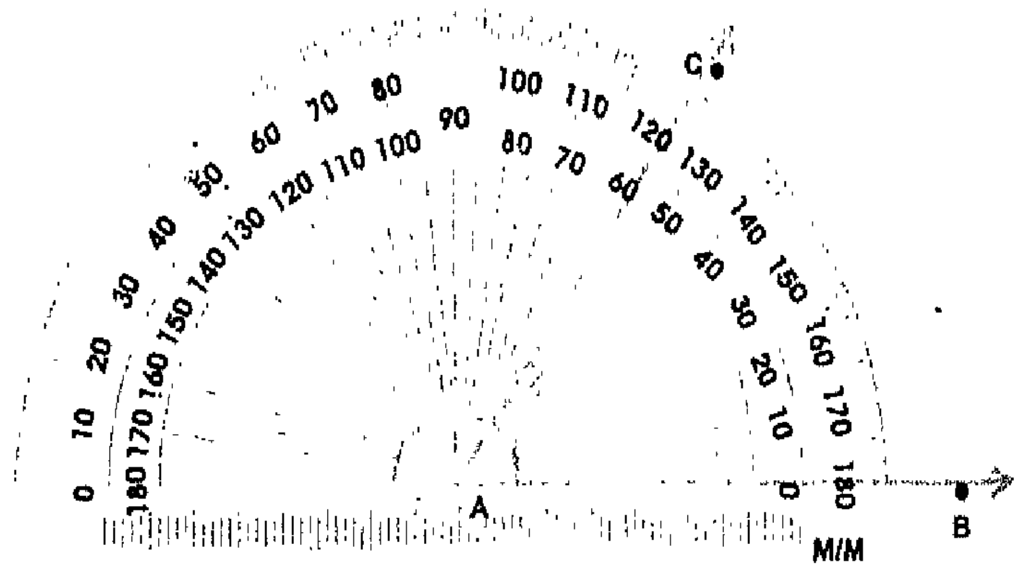
1. कोण BAC के माप को संकेत '$m\angle BAC$' द्वारा व्यक्त करते हैं। परन्तु सरलता के लिए हम संकेत m का प्रयोग नहीं करते। इस प्रकार संकेत '$\angle BAC$' कोण BAC तथा कोण BAC की माप, दोनों के लिए प्रयोग किया जाता है। उदाहरणार्थ, $\angle BAC = 60^\circ$ का अर्थ $m\angle BAC = 50^\circ$ इत्यादि है।
2. प्रत्येक न्यून कोण, समकोण एवं अधिक कोण के संगत, एक प्रतिवर्ती कोण होता है।

आपको याद है कि पिछली कक्षाओं में हमने कोणों के मापन के लिए चाँदे (protractor) का उपयोग किया था। आइए चाँदे द्वारा $\angle BAC$ (आकृति 10.42) का मापन करें।



आकृति 10.42

चाँदे को कोण पर इस प्रकार रखिए कि इसका केन्द्र कोण के शीर्ष पर पड़े और 0–180 रेखा कोण की एक भुजा (मान लीजिए AB) के अनुदिश रहे (आकृति 10.43)।

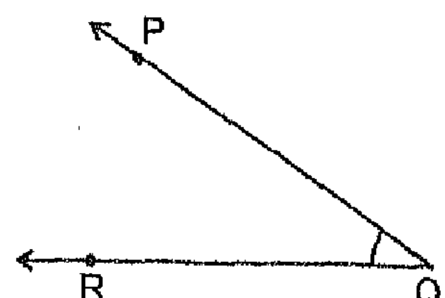


आकृति 10.43

अब गोलाई वाले किनारे पर लगे हुए उस चिह्न को पढ़िए जिससे होकर भुजा AC जाती है। यह चिह्न चाँदे पर स्थित दो संख्या शृंखलाओं में से उस शृंखला पर पड़ना चाहिए जिस की शून्य संख्या पहली भुजा AB पर पड़ती है। आकृति 10.43 में $\angle BAC$ का माप $57°$ पढ़ा जाता है। इसे हम $\angle BAC = 57°$ लिखते हैं।

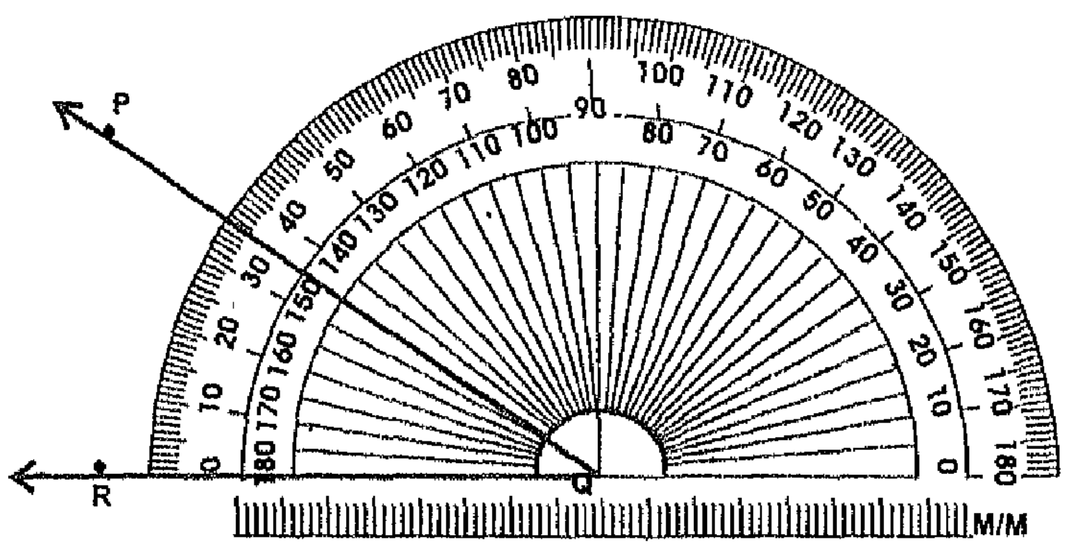
यहाँ हमने अन्दर वाली संख्या शृंखला पर चिह्न को पढ़ा है।

इसी प्रक्रिया को दोहराते हुए, अब हम चाँदे द्वारा $\angle PQR$ (आकृति 10.44) का मापन करते हैं।



आकृति 10.44

इसके लिए पुनः चाँदे को कोण PQR पर इस प्रकार रखते हैं कि चाँदे का केन्द्र कोण के शीर्ष पर तथा 0 - 180 रेखा एक भुजा (मान लीजिए QR) के अनुदिश रहे (आकृति 10.45)।

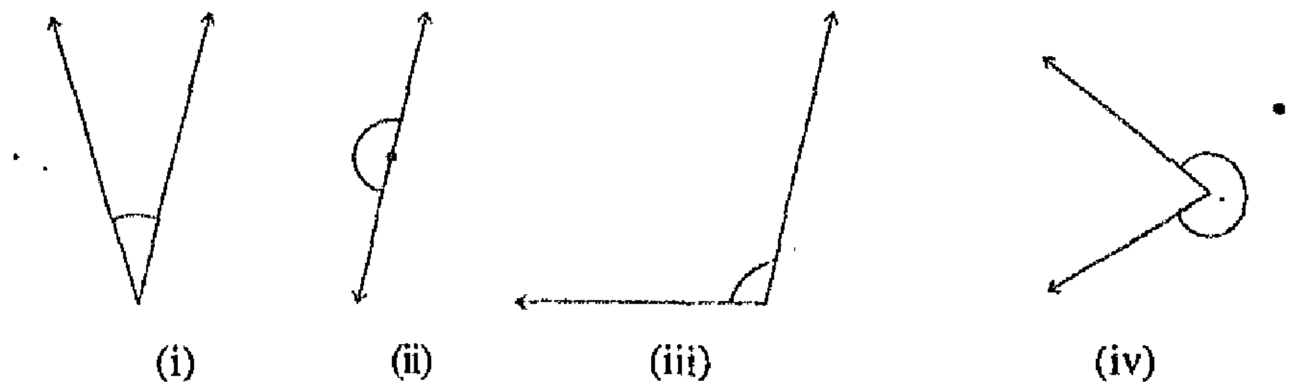


आकृति 10.45

अब हम गोलाई वाले किनारे पर बने उस चिह्न को पढ़ते हैं जिससे होकर भुजा QP जाती है। इस बार भी चिह्न उसी ओर का पढ़ा जाता है जिसका शून्य भुजा QR पर है। ध्यान दीजिए कि इस बार हम बाहरी ओर के संख्या चिह्न प्रयोग कर रहे हैं।

हमें प्राप्त होता है कि $\angle PQR$ का माप $35°$ है, जिसे $\angle PQR = 35°$ भी लिखा जाता है।

उदाहरण 5 : आकृति 10.46 में दर्शाए गए कोणों का न्यून, अधिक, सम, ऋजु या प्रतिवर्ती कोण के रूप में वर्गीकरण कीजिए।



आकृति 10.46

हल :

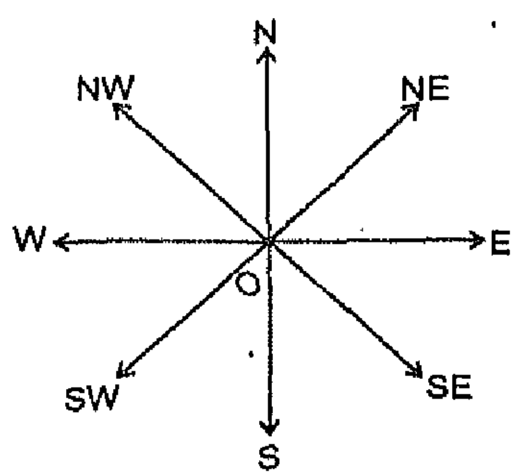
(i) न्यून कोण (ii) ऋजु कोण

(iii) अधिक कोण (iv) प्रतिवर्ती कोण

उदाहरण 6 : ललित उत्तर दिशा की ओर जा रहा है। यदि वह अचानक अपनी दिशा बदल कर अपने बाईं ओर एक

(i) संपूर्ण कोण (ii) ऋजु कोण

मुड़ कर चलने लगता है, तो वह किस दिशा में चल रहा है?



आकृति 10.47

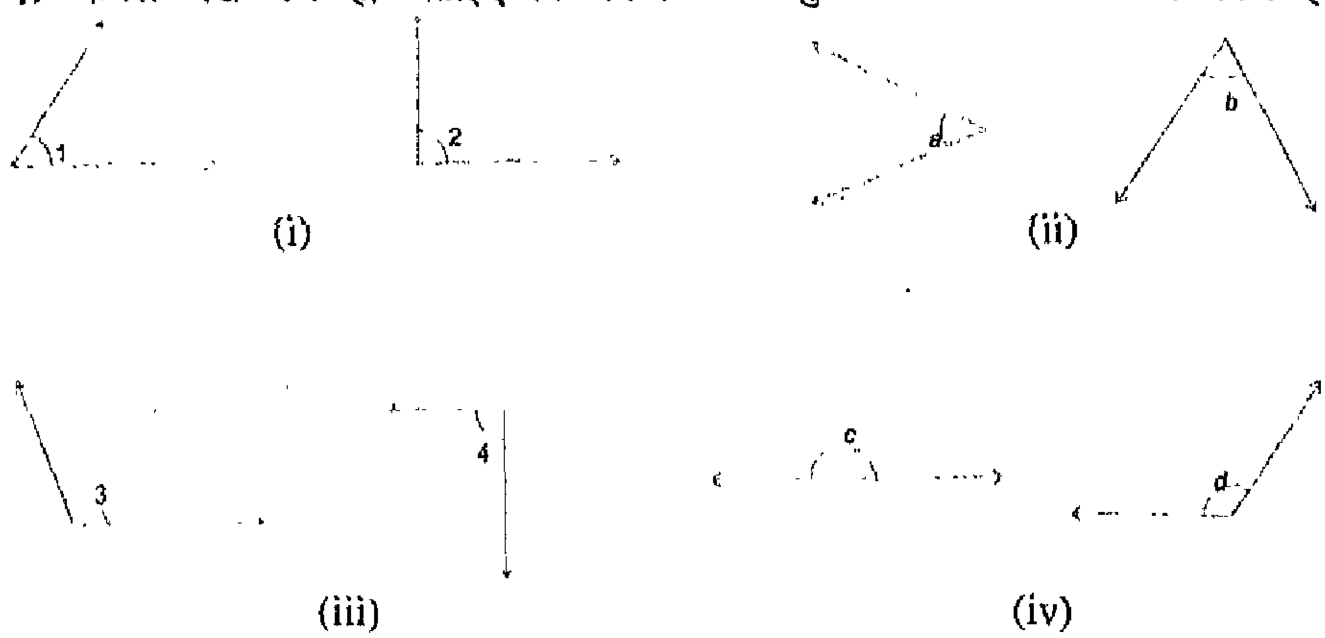
हल :

(i) उत्तर दिशा (ii) दक्षिण दिशा

●●●

प्रश्नावली 10.3

1. केवल देख कर ही बताइए कि निम्न कोण युग्मों में कौन सा कोण छोटा है:

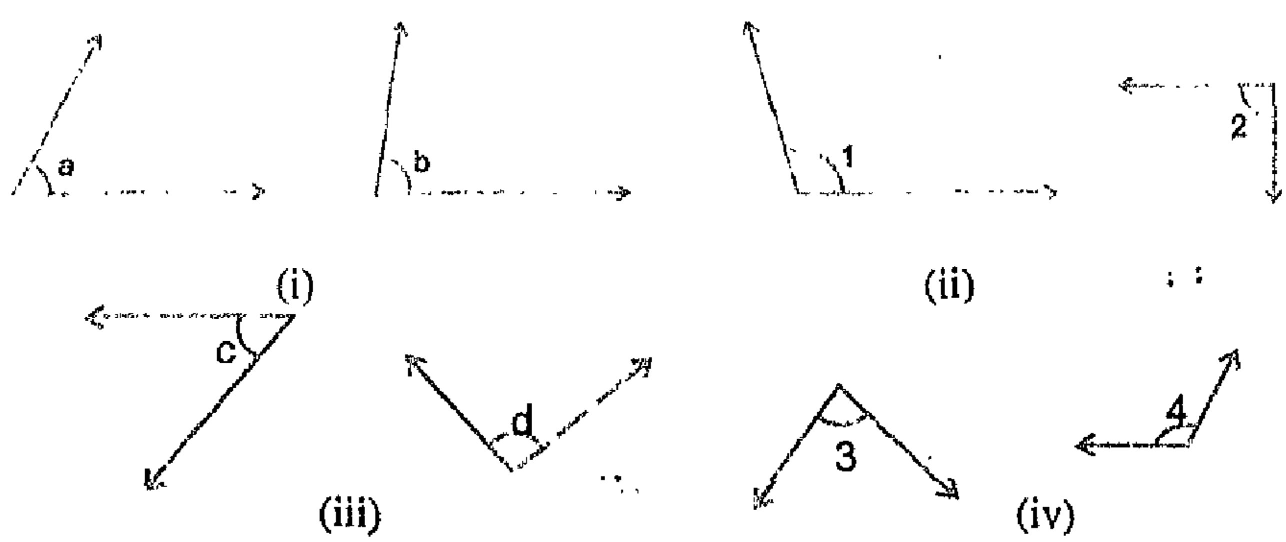


आकृति 10.48

2. आकृति 10.49 में दिए कोण युग्मों की अक्स कागज तथा साथ ही साथ चाँदे द्वारा तुलना कीजिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

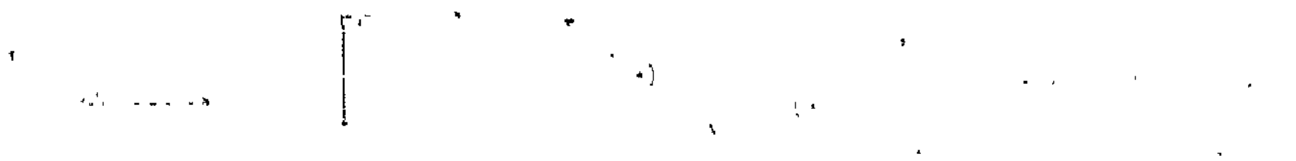
(a) क्या $\angle a > \angle b$ से? (b) क्या $\angle 1 > \angle 2$ से?

(c) क्या $\angle c < \angle d$ से? (d) क्या $\angle 3 = \angle 4$ है?



आकृति 10.49

3. निम्न में से प्रत्येक कोण को न्यून, अधिक, सम, ऋजु या प्रतिवर्ती कोण के रूप में वर्गीकृत कीजिए:



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

आकृति 10.50

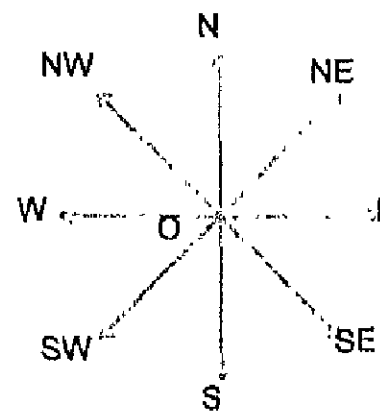
4. मुकेश व रहीम एक बिन्दु A से चलना प्रारम्भ करते हैं। मुकेश पूर्व की ओर E तक तथा रहीम दक्षिण की ओर S तक जाता है। इन दोनों के बीच बने कोण को खींचिए। यह किस प्रकार का कोण है?

5. सुधा उत्तर-पूर्व दिशा में नौका चालन कर रही है। यदि वह अपने बाईं ओर एक

   (i) ऋजु कोण

   (ii) संपूर्ण कोण

   घूम कर नौका चालन करने लगे, तो वह किस दिशा में नौका चालन कर रही है?



आकृति 10.51

6. निम्नलिखित कोणों को शून्य, न्यून, सम, अधिक, ऋजु व प्रतिवर्ती कोण के रूप में पहचानिए:

   (i) 50° (ii) 110° (iii) 75° (iv) 180° (v) 210° (vi) 360° (vii) 0° (viii) 90°

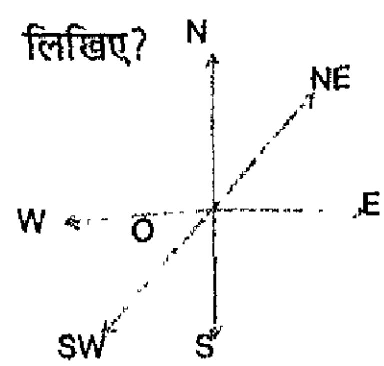
7. पटरी व पेंसिल का उपयोग कर एक न्यून कोण, एक अधिक कोण, एक ऋजु कोण व एक प्रतिवर्ती कोण बनाइए। चाँदे की सहायता से प्रत्येक को मापिए।

8. निम्न दिशाओं के बीच में बनने वाले कोणों के प्रकार लिखिए?

   (i) पूर्व और पश्चिम

   (ii) पूर्व और उत्तर

   (iii) उत्तर-पूर्व और दक्षिण-पश्चिम

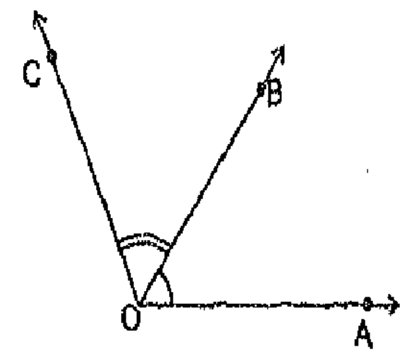


आकृति 10.52

10.6 कोणों के युग्म

प्रायः हमें कुछ ऐसे कोण-युग्म देखने को मिलते हैं जिनमें कुछ विशेष गुण होते हैं। ऐसे कुछ कोणों के युग्म यहाँ दिए जा रहे हैं।

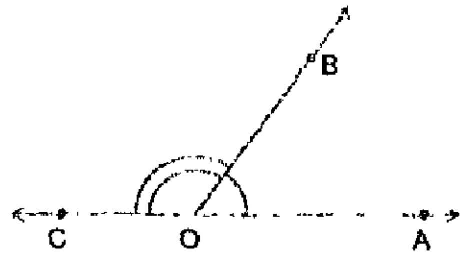
(i) आसन्न कोणः आकृति 10.53 का अवलोकन करें। यहाँ दो कोण ∠AOB व ∠BOC ऐसे हैं जिनमें शीर्ष O तथा एक भुजा OB उभयनिष्ठ है। दूसरी भुजाएँ OA तथा OC उभयनिष्ठ भुजा OB द्वारा निर्धारित रेखा के विपरीत ओर स्थित हैं। इस प्रकार के दो कोण *आसन्न कोण (adjacent angles)* कहलाते हैं। इस प्रकार ***एक ही तल में स्थित दो कोण आसन्न कोण कहलाते हैं, यदि उनका शीर्ष एक ही हो, उनमें एक भुजा उभयनिष्ठ हो और दूसरी दोनों भुजाएँ उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर स्थित हों।***



आकृति 10.53

आकृति 10.53 में, ∠AOB व ∠BOC आसन्न कोण हैं। परन्तु ∠AOB व ∠AOC आसन्न कोण नहीं हैं। क्या आप बता सकते हैं कि ये कोण आसन्न कोण क्यों नहीं हैं? इस कोण युग्म में शीर्ष भी एक ही है तथा एक भुजा OA उभयनिष्ठ भी है। परन्तु OB तथा OC भुजा OA के एक ही ओर स्थित हैं, न कि विपरीत ओर।

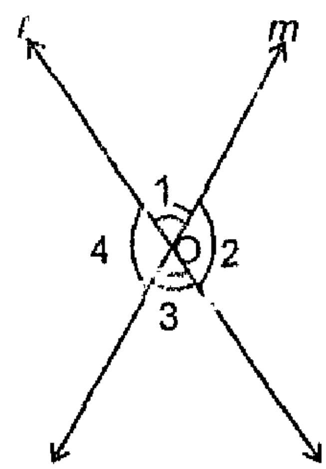
(ii) रैखिक युग्मः आकृति 10.54 को देखिए। यहाँ कोणों ∠AOB व ∠BOC के बारे में आप क्या कह सकते हैं? ये विशेष प्रकार के आसन्न कोण हैं। इन कोणों में दो भुजाएँ OA व OC, जो उभयनिष्ठ नहीं हैं, एक रेखा बनाती हैं (या विपरीत किरणें हैं)। आसन्न कोणों के ऐसे युग्म को *रैखिक युग्म (linear pair)* (रेखा बनाने वाला युग्म) कहते हैं। इस प्रकार ***रैखिक युग्म आसन्न कोणों का वह युग्म है जिनकी उभयनिष्ठ न होने वाली भुजाएँ एक सरल रेखा बनाती हैं (या विपरीत किरणें हैं)।***



आकृति 10.54

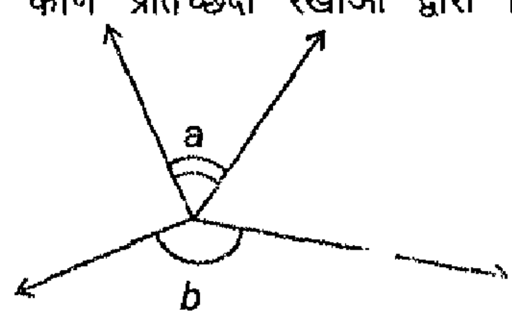
टिप्पणी : रैखिक युग्म बनाने वाले कोण आसन्न कोण होते हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि दो आसन्न कोण एक रैखिक युग्म ही बनाएँ।

(iii) शीर्षाभिमुख कोण: आइए आकृति 10.55 का अवलोकन करें। यहाँ दो रेखाएँ l व m बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हुए चार कोण ∠1, ∠2, ∠3 व ∠4 बनाती हैं। कोण युग्म ∠1 व ∠2 को देखिए। इनमें एक भुजा उभयनिष्ठ है। इसी प्रकार, कोण युग्म ∠2 व ∠3 में भी एक भुजा उभयनिष्ठ है। परन्तु कोण युग्म ∠1 व ∠3 में कोई भुजा उभयनिष्ठ नहीं है। इसी प्रकार, कोण युग्म ∠2 व ∠4 में कोई भुजा उभयनिष्ठ नहीं है। इस प्रकार के कोण युग्म ***शीर्षाभिमुख कोण*** *(vertically opposite angles)*, कहलाते हैं। इस प्रकार, ***दो प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बनाए गए ऐसे दो कोण जिनमें कोई भी भुजा उभयनिष्ठ न हो, शीर्षाभिमुख कोण कहलाते हैं।***



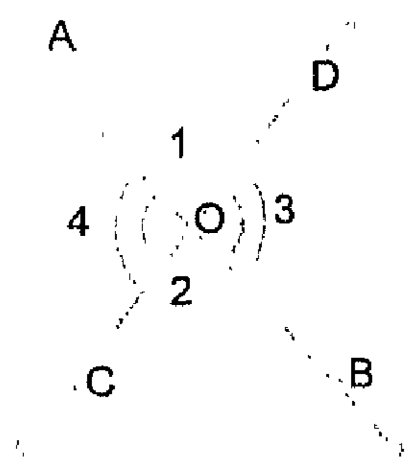
आकृति 10.55

आकृति 10.55 में, ∠1 व ∠3 शीर्षाभिमुख कोण हैं। इसी प्रकार, ∠2 व ∠4 भी शीर्षाभिमुख कोण हैं। क्या आकृति 10.56 में, ∠a व ∠b शीर्षाभिमुख कोण हैं? नहीं, क्योंकि ये कोण प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा निर्मित नहीं हैं।



आकृति 10.56

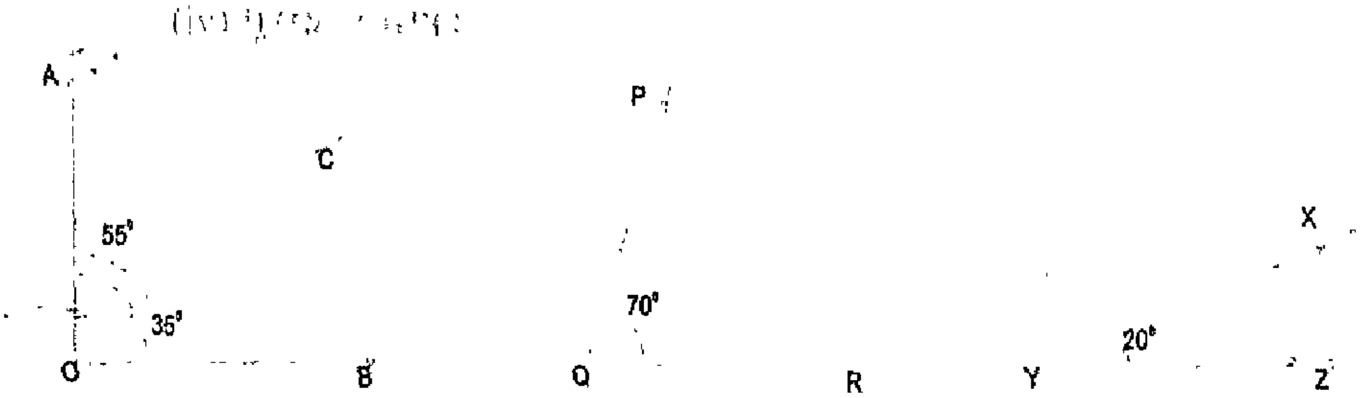
दो रेखाएँ AB व CD बिन्दु O पर काटती हुई खींचिए जो ∠1, ∠2, ∠3 व ∠4 बनाएँ (आकृति 10.57) । ∠1 व ∠2 शीर्षाभिमुख कोण हैं। इसी प्रकार, ∠3 व ∠4 शीर्षाभिमुख कोण हैं। एक अक्स कागज लें और उस पर ∠1 की भुजाएँ OA व OD तथा शीर्ष O को अक्स करें। अब इस अक्स किए कागज को ∠2 पर इस प्रकार रखें कि ∠AOD का शीर्ष ∠BOC के शीर्ष पर हो तथा ∠1 की भुजा OD, ∠2 की भुजा OB के अनुदिश रहे। आप क्या देखते हैं? ∠1 की भुजा OA, ∠2 की भुजा OC के अनुदिश है। अर्थात् ∠1 = ∠2 है।



आकृति 10.57

इसी प्रयोग को ∠3 व ∠4 के लिए दोहराएँ। आप क्या देखते हैं? निश्चित रूप से ही ∠3 = ∠4 है। अब इन कोणों का चाँदे द्वारा मापन करें। आप क्या पाते हैं? आप पाएँगे कि ∠1 = ∠2 तथा ∠3 = ∠4 है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

शीर्षाभिमुख कोण सदैव एक दूसरे के बराबर होते हैं।



(i) (ii)

आकृति 10.58

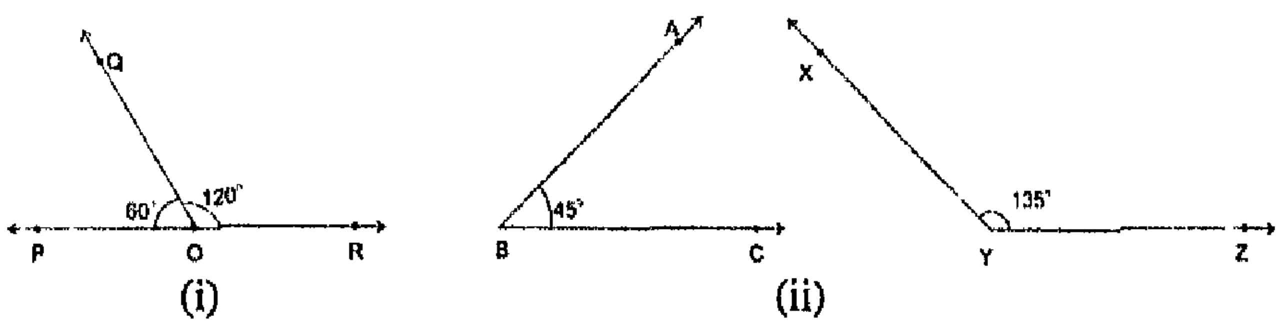
आकृति 10.58 का अवलोकन करें। आकृति 10.58 (i) में ∠AOC व

∠COB का योग 90° है। इसी प्रकार आकृति 10.58 (ii) में कोणों ∠PQR व ∠XYZ का योग 90° है। इस प्रकार के कोण युग्म **पूरक कोण** *(complementary angles)* कहलाते हैं। अतः

यदि दो कोणों की मापों का योग 90° है, तो वे पूरक कोण कहलाते हैं। और प्रत्येक कोण एक दूसरे का पूरक (complement) कहलाता है।

इस प्रकार आकृति 10.58 (i) में, ∠AOC व ∠COB पूरक कोण हैं। इसी प्रकार, आकृति 10.58 (ii) में ∠PQR व ∠XYZ पूरक कोण हैं। साथ ही, ∠AOC ∠COB का पूरक है और ∠COB, ∠AOC का पूरक है। यही बात दूसरे युग्म के बारे में भी कही जा सकती है।

(v) संपूरक कोणः



आकृति 10.59

आकृति 10.59 को ध्यान से देखिए। 10.59(i) में बने दोनों आसन्न कोणों ∠POQ व ∠QOR के मापों का योग 180° है। इसी प्रकार, 10.59(ii) में कोण युग्म ∠ABC व ∠XYZ का योग 180° है। इस प्रकार के कोणों को *संपूरक कोण (supplementary angles) कहते हैं।* अर्थात्

यदि दो कोणों का योग 180° है, तो वे संपूरक कोण कहलाते हैं तथा उनमें से प्रत्येक कोण एक दूसरे का संपूरक (supplement) कहलाता है।

आकृति 10.59(i) में ∠POQ व ∠QOR संपूरक कोण हैं। ∠POQ, ∠QOR का संपूरक है और ∠QOR, ∠POQ का संपूरक है। इसी प्रकार, 10.59 (ii) में ∠ABC व ∠XYZ संपूरक कोण हैं।

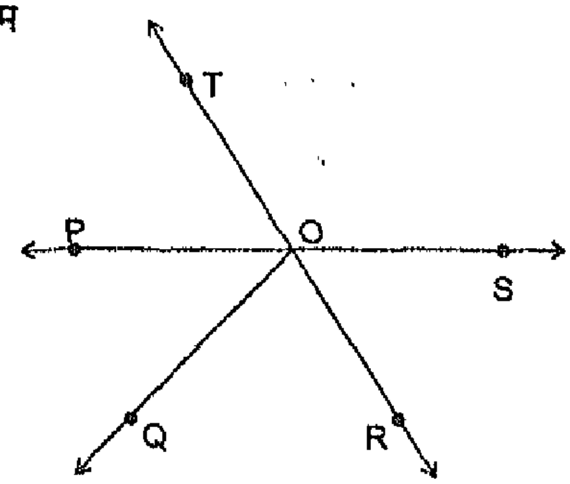
टिप्पणीः एक रैखिक युग्म के कोण संपूरक कोण होते हैं परन्तु संपूरक कोणों के युग्म का रैखिक युग्म होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरण 7: आकृति 10.60 में, निम्न कोण युग्मों की पहचान कीजिए :

(i) आसन्न कोणों के पाँच युग्म

(ii) प्रत्येक रैखिक युग्म

(iii) शीर्षाभिमुख कोण



आकृति 10.60

हल:

(i) आसन्न कोण बनाने वाले पाँच युग्म हैं :

(∠POT, ∠TOS); (∠TOS, ∠SOR); (∠SOR, ∠ROQ); (∠ROQ, ∠QOP) और (∠QOP, ∠POT)।

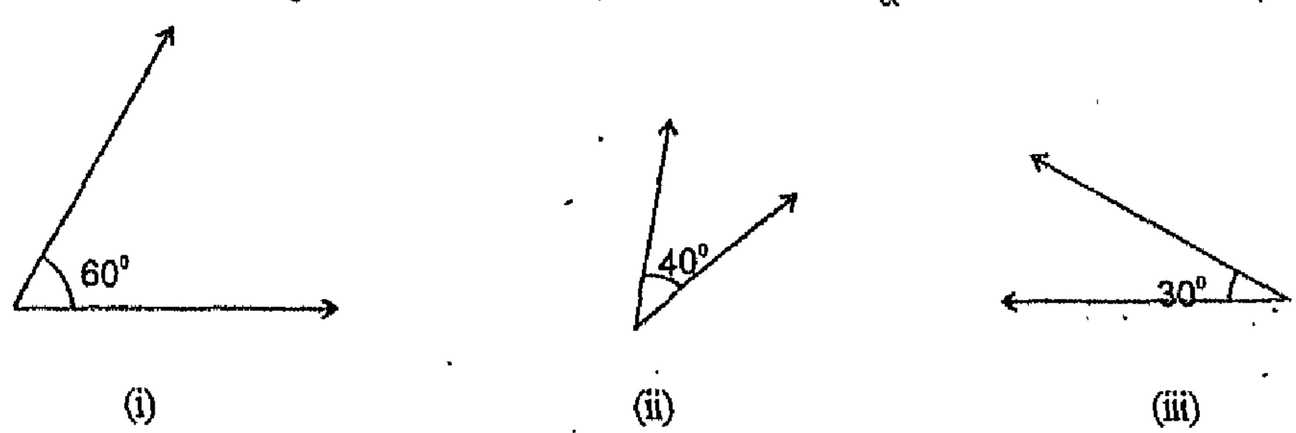
(ii) रैखिक युग्म हैं:

(∠POT, ∠TOS); (∠TOS, ∠SOR); (∠SOR, ∠ROP); (∠SOQ, ∠QOP); (∠ROQ, ∠QOT) और (∠ROP, ∠POT)।

(iii) शीर्षाभिमुख कोण हैं:

(∠POT, ∠SOR) और (∠TOS, ∠POR)

उदाहरण 8: आकृति 10.61 में दिए गए कोणों के पूरक कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.61

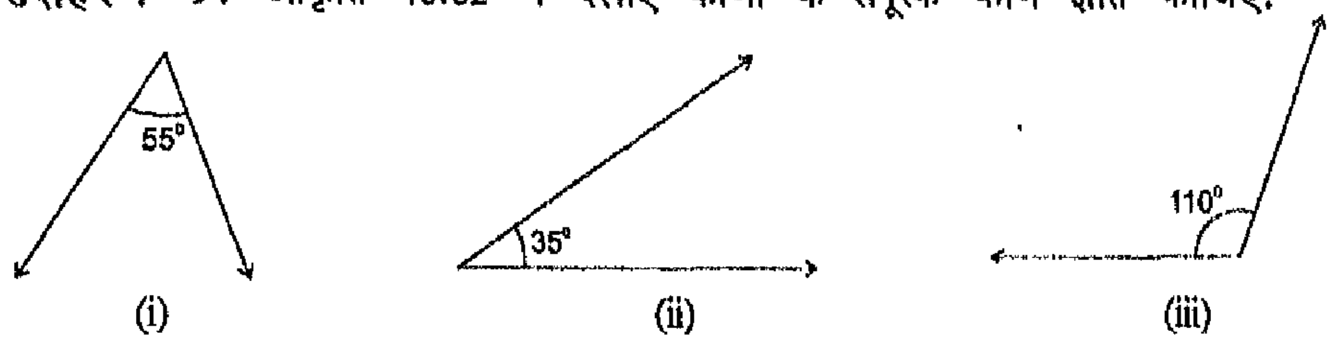
हल:

(i) चूँकि 60° + 30° = 90° है, इसलिए पूरक कोण = 30°

(ii) पहले की तरह, पूरक कोण = 50°

(iii) पहले की ही तरह, पूरक कोण = 60°

उदाहरण 9: आकृति 10.62 में दर्शाए कोणों के संपूरक कोण ज्ञात कीजिए:



आकृति 10.62

हल:

(i) चूँकि 55° + 125° = 180° है, इसलिए संपूरक कोण = 125°

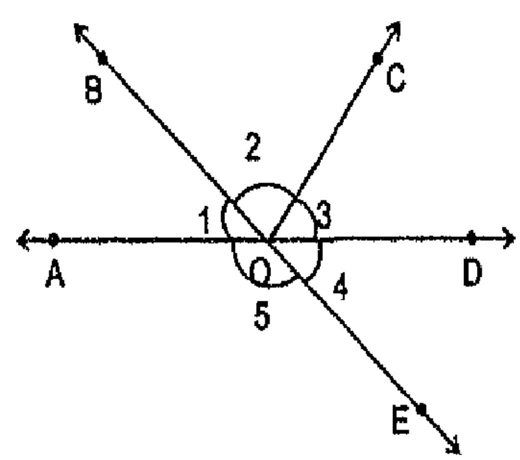
(ii) पहले की तरह, संपूरक कोण = 145°

(iii) पहले की ही तरह, संपूरक कोण = 70°

●●●

प्रश्नावली 10.4

1. आकृति 10.63 में, क्या
   (i) ∠1, ∠2 का आसन्न कोण है?
   (ii) ∠DOE, ∠COE का आसन्न कोण है?
   (iii) ∠AOB व ∠BOD एक रैखिक युग्म बनाते हैं?
   (iv) ∠AOE, ∠DOE का संपूरक है?
   (v) ∠1 और ∠4 शीर्षाभिमुख कोण हैं?

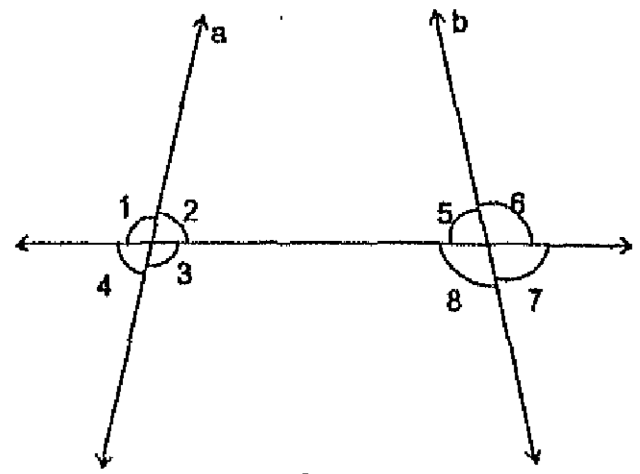


आकृति 10.63

2. आकृति 10.64 में से लिखिए :

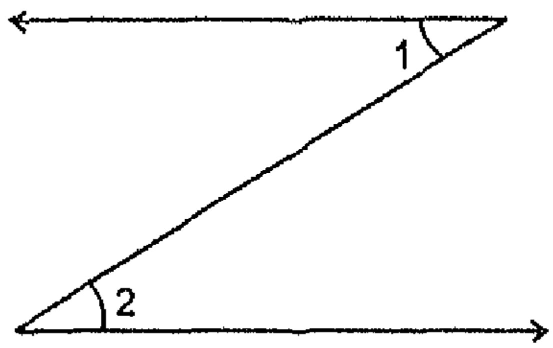
(i) सभी रैखिक युग्म

(ii) सभी कोण युग्म जो शीर्षाभिमुख कोण हैं।



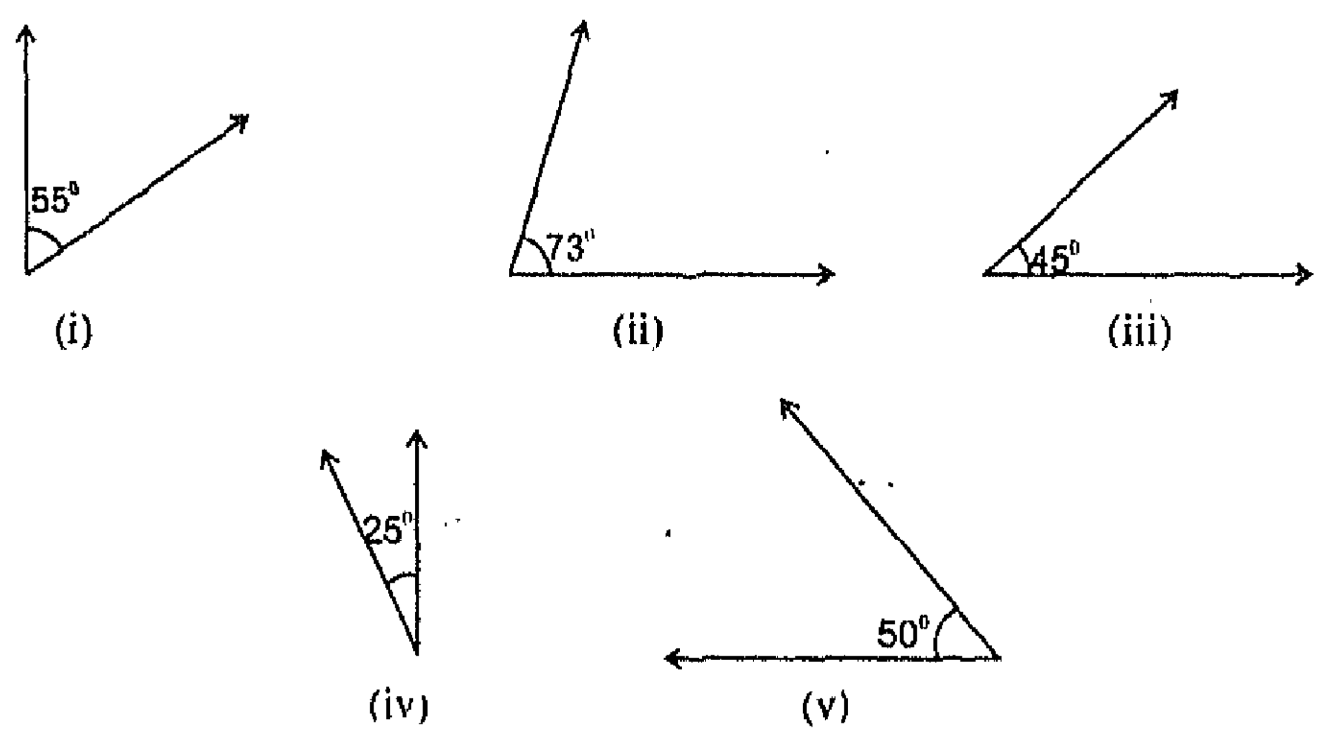
आकृति 10.64

3. आकृति 10.65 में, क्या ∠1 व ∠2 आसन्न कोण हैं? सकारण उत्तर दीजिए।



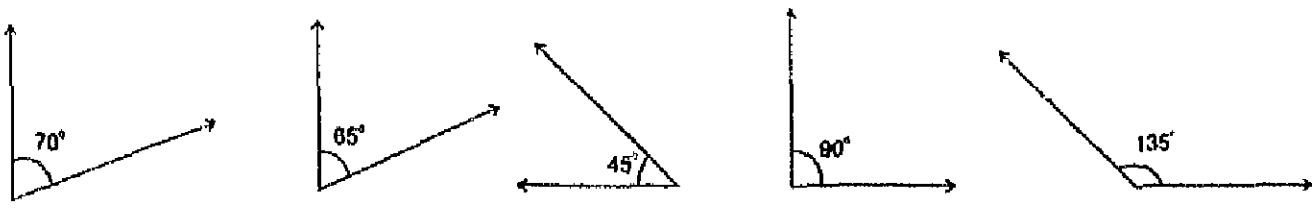
आकृति 10.65

4. निम्न में से प्रत्येक कोण का पूरक कोण ज्ञात कीजिए :



आकृति 10.66

5. निम्नलिखित सभी कोणों के संपूरक लिखिए:



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

आकृति 10.67

6. निम्न कोण युग्मों में से पूरक व संपूरक कोणों के युग्मों की पहचान कीजिए:

(i) 70°, 20° (ii) 160°, 20° (iii) 63°, 27° (iv) 50°, 40°

(v) 110°, 70° (vi) 90°, 90° (vii) 45°, 45° (viii) 65°, 25°

7. एक ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने संपूरक के बराबर हो।

8. एक ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने पूरक के बराबर हो।

9. दो संपूरक कोणों में से एक कोण की माप घटती है। यदि दूसरे कोण को इस प्रकार समायोजित किया जाता है कि दोनों कोण अभी भी संपूरक रहें, तो दूसरे कोण की माप में क्या अन्तर आएगा और क्यों ?

10. रैखिक युग्म का एक कोण न्यून कोण है। दूसरा कोण किस प्रकार का होगा?

11. क्या दो कोण सपूंरक हो सकते हैं? यदि वे दोनों कोण हों:

(i) अधिक कोण ? (ii) न्यून कोण ? (iii) समकोण ?

12. एक कोण 45° से बड़ा है। ज्ञात कीजिए कि इसका पूरक कोण क्या 45° से बड़ा होगा, बराबर होगा या छोटा होगा।

13. निम्न में प्रत्येक स्थिति के लिए कोणों x, y और z के मान ज्ञात कीजिए:



आकृति 10.68

14. निम्न कथनों में सत्य (T) और असत्य (F) कथन पहचानिए:

(i) आसन्न कोण पूरक कोण हो सकते हैं।

(ii) संपूरक कोण रैखिक युग्म बनाते हैं।

(iii) न्यून कोण का संपूरक अधिक कोण होता है।

(iv) यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेदी हैं, तो शीर्षाभिमुख कोणों के एक युग्म के कोण सदैव न्यून कोण व दूसरे युग्म के कोण सदैव अधिक कोण होंगे।

(v) यदि दो कोण पूरक हैं, तो उनकी मापों का योग 90° होता है।

(vi) रैखिक युग्म के कोण सदैव संपूरक होते हैं।

याद रखने योग्य बातें

1. किरण AB का एक प्रारंभिक बिन्दु (या अंत बिन्दु) A होता है और वह एक दिशा में अपरिमित रूप से विस्तृत होती है। किरण AB और किरण BA दो भिन्न किरणें होती हैं।
2. एक ही रेखा पर स्थित दो किरणें, जिनका प्रारंभिक बिन्दु एक ही है, परन्तु दिशाएँ विपरीत हैं, ***विपरीत किरणें*** कहलाती हैं।
3. ***कोण*** ऐसी दो किरणों द्वारा बनाई गई आकृति है जिनका प्रारंभिक बिन्दु एक ही होता है। यह प्रारंभिक बिन्दु कोण का ***शीर्ष*** कहलाता है और दोनों किरणें कोण की ***भुजाएँ*** कहलाती हैं।
4. 1 संपूर्ण कोण = 4 समकोण = 360°,
1 ऋजु कोण = 2 समकोण = 180°, 1 समकोण = 90°,
शून्य कोण = 0°, 0° < न्यून कोण < 90°,
90° < अधिक कोण < 180°, तथा 180° < प्रतिवर्ती कोण < 360°,
5. एक समकोण बनाने वाली दो किरणें परस्पर ***लम्ब*** कहलाती हैं। ऐसी किरणों द्वारा निर्मित रेखाएँ भी एक दूसरे पर ***लम्ब*** कहलाती हैं। संकेत ⊥ का उपयोग 'पर लम्ब है' व्यक्त करने के लिए किया जाता है।
6. दो कोण, जिनमें शीर्ष और एक भुजा उभयनिष्ठ हों तथा कोणों की अन्य भुजाएँ उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर स्थित हों, ***आसन्न कोण*** कहलाते हैं।

7. ऐसे आसन्न कोण जिनकी वे दो भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं हैं, विपरीत किरणें हों, एक ***रैखिक युग्म*** बनाते हैं।
8. दो प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा निर्मित कोण युग्म जिनमें कोई भुजा उभयनिष्ठ नहीं है, ***शीर्षाभिमुख कोण*** कहलाते हैं। शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।
9. दो कोण जिनका योग 90° हो, *पूरक कोण* कहलाते हैं। प्रत्येक कोण एक दूसरे का पूरक कहलाता है।
10. दो कोण जिनका योग 180° हो ***संपूरक कोण*** कहलाते हैं। प्रत्येक कोण एक दूसरे का ***संपूरक*** कहलाता है।
11. एक रैखिक युग्म बनाने वाले दो कोण आसन्न और संपूरक होते हैं।
12. यह आवश्यक नहीं है कि दो संपूरक कोण सदैव एक रैखिक युग्म बनाएँ।

रेखा-युग्म और तिर्यक रेखाएँ

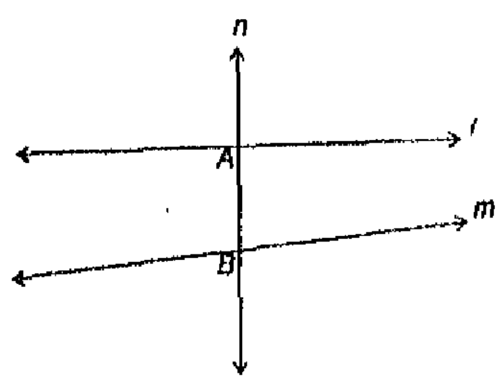
अध्याय 11

11.1 भूमिका

पिछले अध्यायों में, हमने रेखाओं तथा कोणों के बारे में अध्ययन किया। हमने जाना कि रेखा सीधी होती है तथा दोनों दिशाओं में अपरिमित रूप से विस्तृत होती है। इसी प्रकार, कोण एक आकृति है जो उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु वाली दो किरणों से बनती है। इस अध्याय में, हम रेखा-युग्म, तिर्यक रेखा, तिर्यक रेखा द्वारा दो रेखाओं के साथ बने कोण तथा तिर्यक रेखा द्वारा दो समांतर रेखाओं के साथ बने कोणों के बीच संबंधों के बारे में अध्ययन करेंगे। हम यह मान कर चलेंगे कि जिन रेखाओं की हम चर्चा कर रहे हैं वे सभी एक ही तल में स्थित हैं।

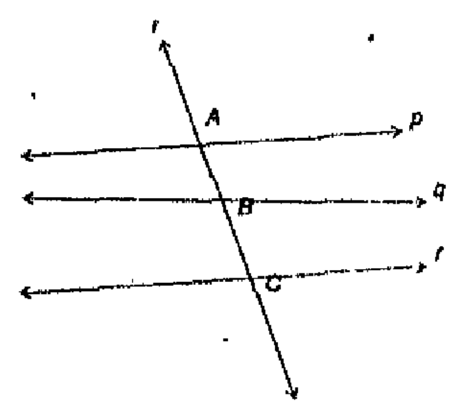
11.2 तिर्यक रेखा

आइए एक तल में स्थित दो रेखाओं l व m (आकृति 11.1) पर विचार करें। मान लीजिए इसी तल में स्थित एक अन्य रेखा n दोनों रेखाओं l व m को दो *भिन्न* बिन्दुओं A व B पर काटती है। इस स्थिति में रेखा n दी हुई रेखाओं l व m की ***तिर्यक रेखा*** *(transversal)* कहलाती है।



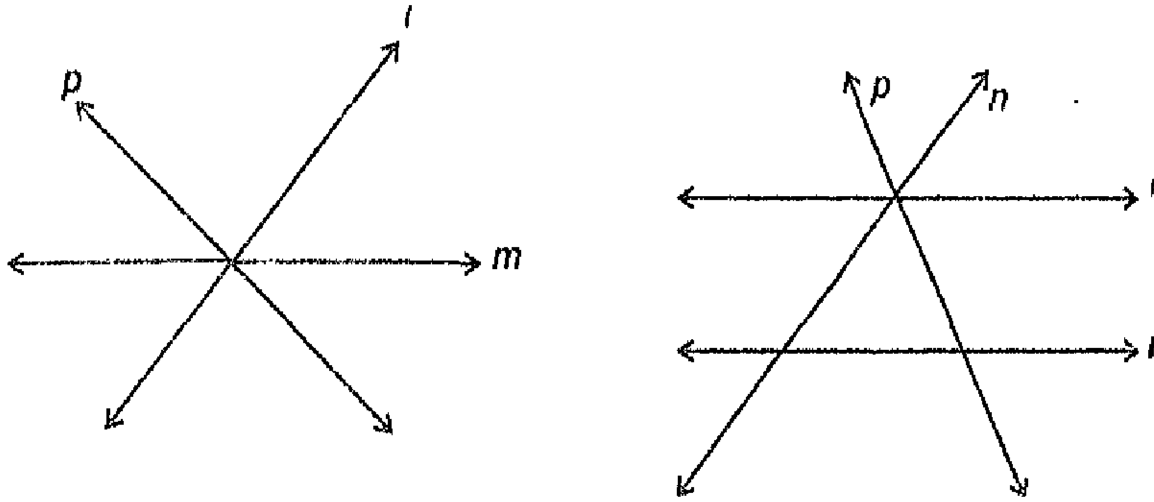
आकृति 11.1

आकृति 11.2 में रेखा l *तीन* रेखाओं p, q व r को क्रमशः तीन *भिन्न* बिन्दुओं A, B व C पर काटती है। यहाँ भी रेखा l रेखाओं p, q व r की तिर्यक रेखा है।



आकृति 11.2

अब आइए आकृतियों 11.3 (i) व (ii) पर विचार करें।



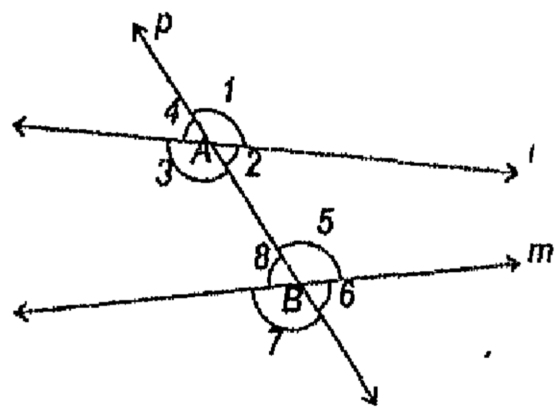
(i) (ii)

आकृति 11.3

आकृति 11.3 (i) में रेखा p दो रेखाओं l व m को *दो* भिन्न बिन्दुओं पर नहीं काटती। इसी प्रकार, आकृति 11.3 (ii) में रेखा p ***तीन*** रेखाओं l, m व n को तीन भिन्न बिन्दुओं पर नहीं काटती। अतः रेखा p रेखाओं l व m पर तिर्यक रेखा नहीं है। अतः रेखा p रेखाओं l, m व n पर तिर्यक रेखा नहीं है। व्यापक रूप में, हम कह सकते हैं कि ***वह रेखा जो एक ही तल में स्थित दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न बिन्दुओं में काटती है, इन रेखाओं की तिर्यक रेखा कहलाती है।***

11.2.1 दो रेखाओं से तिर्यक रेखा द्वारा बनाए गए कोण

मान लीजिए कि l व m दो रेखाएँ हैं और p उनकी एक तिर्यक रेखा है जो l व m को क्रमशः दो भिन्न बिन्दुओं A व B पर काटती है (आकृति 11.4)। तिर्यक रेखा p प्रत्येक रेखा से कितने कोण बनाती है? चूँकि दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ चार कोण बनाती हैं, इसलिए यहाँ कुल मिला कर आठ कोण बनते हैं। सुविधा के लिए हम इन्हें $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$ व $\angle 8$ से व्यक्त करेंगे। इस प्रकार बने आठों कोण आपस में संबंधित हैं। देखते हैं कैसे?



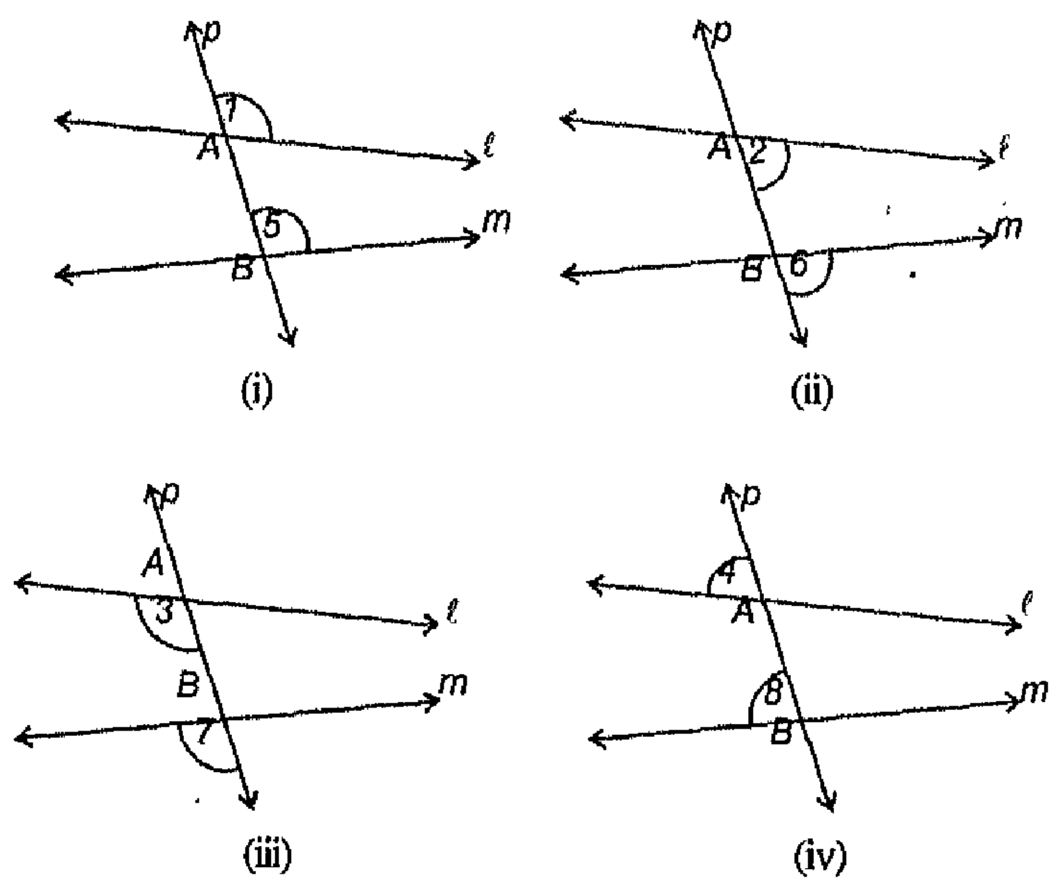
आकृति 11.4

I. बाह्य कोण व अन्त: कोण

आकृति 11.4 में हम देखते हैं कि ∠1, ∠4, ∠6 व ∠7 बाहर की ओर बने हैं तथा ∠2, ∠3, ∠5, ∠8 अन्दर की ओर बने हैं। बाहरी या बाह्य कोण ∠1, ∠4, ∠6, ∠7 ऐसे कोण हैं जिसमें रेखाखंड AB सम्मिलित नहीं है जबकि अन्त: कोणों ∠2, ∠3, ∠5 व ∠8 में रेखाखंड AB एक भुजा के रूप में सम्मिलित है। यहाँ AB दोनों रेखाओं के मध्य तिर्यक रेखा का एक भाग है। व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि

यदि एक ही तल में स्थित दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा इस प्रकार काटे कि AB उसका वह भाग है जो इन रेखाओं के मध्य में आता है, तो वे कोण जिनकी भुजाओं में रेखाखंड AB सम्मिलित नहीं हैं बाह्य कोण कहलाते हैं तथा वे कोण जिनकी भुजाओं में रेखाखंड AB सम्मिलित है अन्त: कोण कहलाते हैं।

II. संगत कोण



आकृति 11.5

आकृति 11.5 (i), (ii), (iii) व (iv) में दिखाए गए कोण युग्मों पर विचार

कीजिए। ये सभी कोण युग्म तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित हैं, इनमें एक कोण बाह्य कोण है तथा दूसरा अन्तः कोण, तथा कोई भी कोण युग्म रैखिक युग्म नहीं बनाता। इस प्रकार के कोण युग्म ($\angle 1$, $\angle 5$), ($\angle 2$, $\angle 6$), ($\angle 3$, $\angle 7$) व ($\angle 4$, $\angle 8$), *संगत कोण (corresponding angles)* कहलाते हैं। इस प्रकार *यदि एक तिर्यक रेखा एक ही तल में स्थित दो रेखाओं को काटती है, तो एक कोण युग्म संगत कोणों का युग्म कहलाता है, यदि*

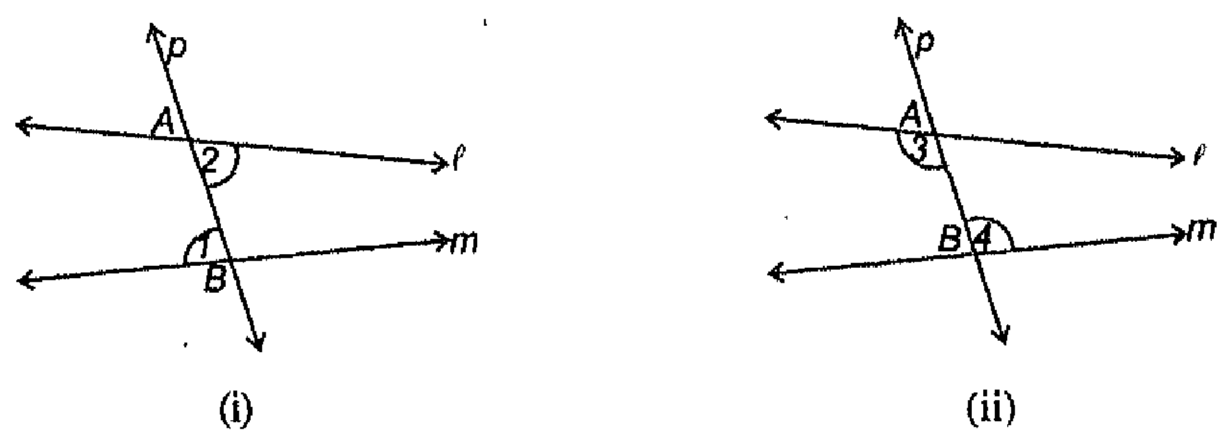
(i) दोनों कोण तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित हैं,

(ii) युग्म का एक कोण अन्तः कोण है तथा दूसरा बाह्य कोण व

(iii) कोण युग्म एक रैखिक युग्म नहीं है।

III. अन्तः एकान्तर कोण

आकृति 11.6 (i) व (ii) में स्थित कोण युग्मों ($\angle 1, \angle 2$) और ($\angle 3, \angle 4$) पर विचार कीजिए।



आकृति 11.6

प्रत्येक युग्म में कोण अन्तः कोण हैं, तिर्यक रेखा के विपरीत पक्षों में हैं तथा रैखिक युग्म नहीं बनाते हैं। इस प्रकार का कोण युग्म ***अन्तः एकान्तर कोणों*** *(alternate interior angles)* का युग्म कहलाता है। इस प्रकार, *यदि एक तिर्यक रेखा उसी तल में स्थित दो रेखाओं को काटती है, तो एक कोण युग्म अन्तः एकान्तर कोण युग्म कहलाता है, यदि*

(i) युग्म के दोनों कोण अन्तः कोण हैं,

(ii) कोण तिर्यक रेखा के विपरीत पक्षों में हैं, तथा

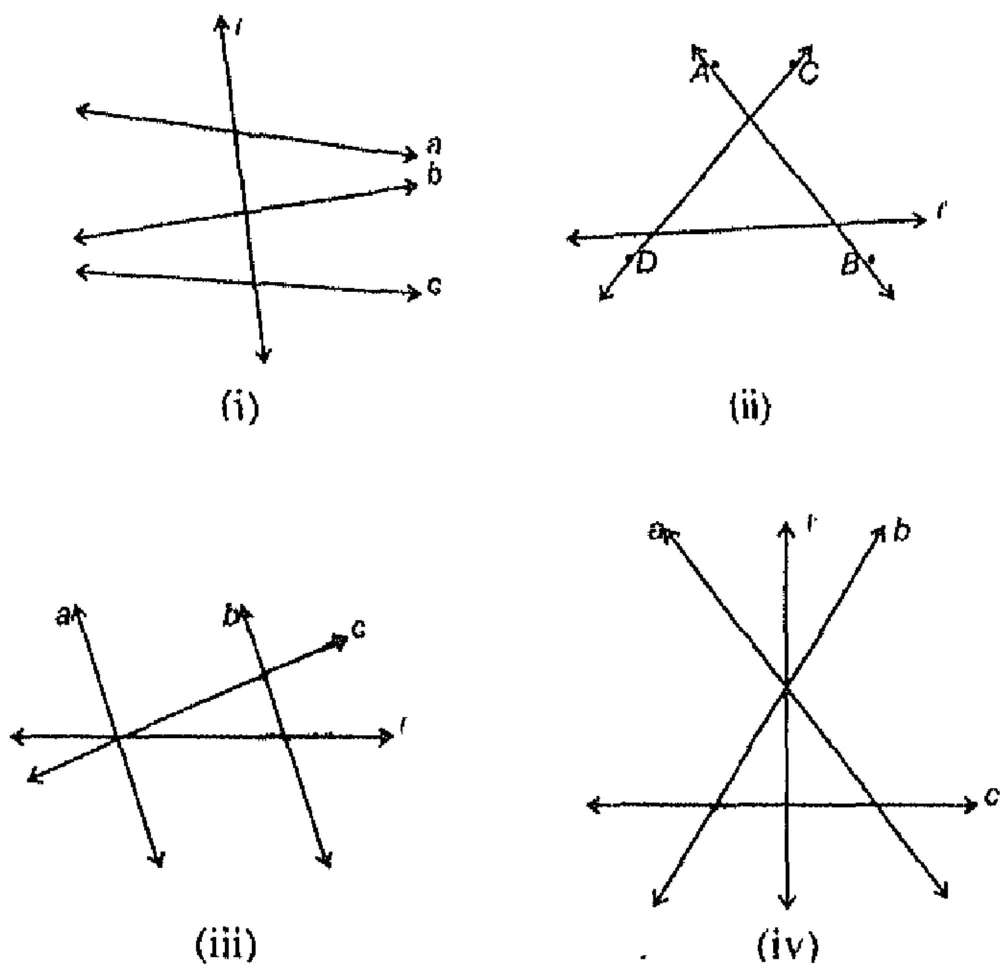
(iii) कोण युग्म रैखिक युग्म नहीं है।

टिप्पणी: सुविधा के लिए, अन्त: *एकान्तर कोणों* को *एकान्तर कोण* भी कहते हैं।

●●●

प्रश्नावली 11.1

1. निम्न में से किस आकृति में रेखा *l* अन्य दी गई रेखाओं की तिर्यक रेखा है?



आकृति 11.7

2. आकृति 11.8 को ध्यानपूर्वक देखिए।

(क) आकृति 11.8 (i) में यदि *p* रेखाओं *l* व *m* की तिर्यक रेखा है तथा

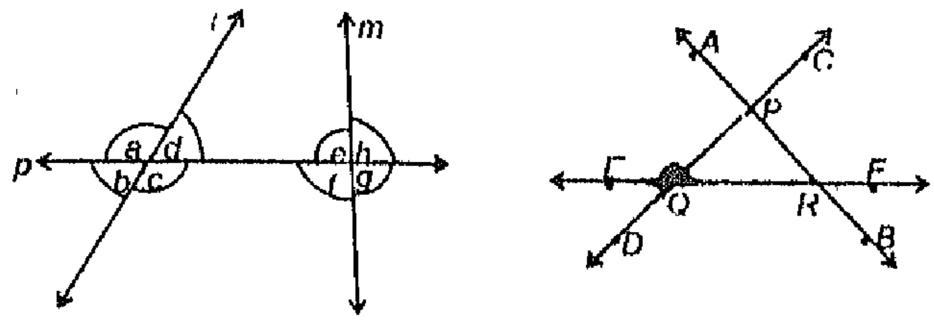
(ख) आकृति 11.8 (ii) में यदि EF रेखाओं AB व CD की तिर्यक रेखा है, तो पहचानिए:

(i) आकृति 11.8 (i) में अन्तः कोण

(ii) आकृति 11.8 (i) में बाह्य कोण

(iii) आकृति 11.8 (i) में संगत कोणों के युग्म

(iv) आकृति 11.8 (i) में अन्तः एकान्तर कोणों के युग्म



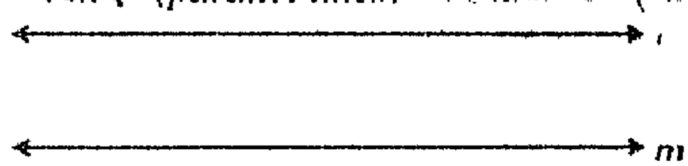
आकृति 11.8

(v) आकृति 11.8 (ii) में ∠BRQ का अन्तः एकान्तर कोण

(vi) आकृति 11.8 (ii) में ∠FRB व ∠PRQ के संगत कोण

11.3 समांतर रेखाएँ

हम पहले पढ़ चुके हैं कि एक तल में स्थित दो रेखाएँ या तो एक बिन्दु पर काटती हैं या फिर काटती ही नहीं हैं (अध्याय 8)। जो रेखाएँ एक दूसरे को नहीं काटती हैं वे रेखाएँ ***समांतर रेखाएँ*** *(parallel lines)* कहलाती हैं (आकृति 11.9)।

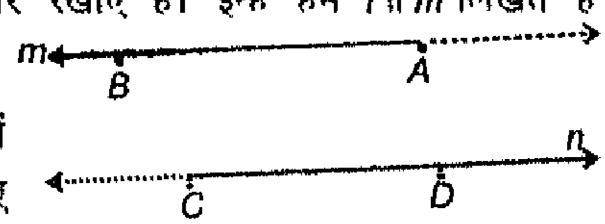


आकृति 11.9

इस प्रकार, ***एक तल में स्थित दो भिन्न रेखाएँ समांतर रेखाएँ कहलाती हैं यदि वे एक दूसरे को किसी भी बिन्दु पर नहीं काटतीं।***

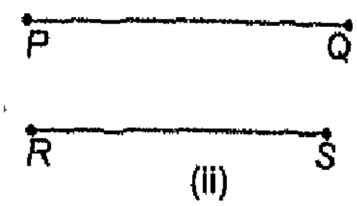
आकृति 11.9 में रेखाएँ *l* व *m* समांतर रेखाएँ हैं। इन्हें हम $l \parallel m$ लिखते हैं तथा '*l* समांतर है *m* के' पढ़ते हैं।

आकृति 11.10(i) में खींची गई किरणों AB और CD पर विचार कीजिए। मान लीजिए



(i)

कि m व n इन किरणों द्वारा निर्धारित रेखाएँ हैं। यदि m व n समांतर हैं, तो हम कहते हैं कि किरणें AB व CD समांतर हैं। दूसरे शब्दों में, *दो किरणें AB व CD समांतर होती हैं,* ***यदि वे अपने प्रारंभिक बिन्दु के दूसरी ओर अपरिमित रुप में विस्तृत होने पर भी प्रतिच्छेद नहीं करती।*** किरणों के समान रेखाखंड भी रेखाएँ निर्धारित करते हैं। यदि तल में स्थित दो रेखाखंड PQ व RS [आकृति 11.10(ii)] समांतर रेखाओं का निर्धारण करते हैं, तो हम कहते हैं कि रेखाखंड समांतर हैं।

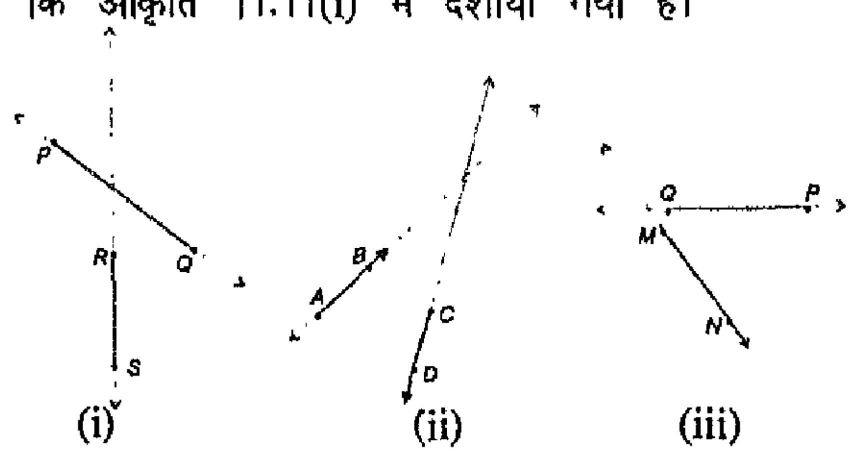


आकृति 11.10

इस प्रकार *दो रेखाखंड समांतर होते हैं यदि वे दोनों दिशाओं में अपरिमित रूप से विस्तृत करने पर भी किसी भी बिन्दु पर प्रतिच्छेद नहीं करते हैं।*

जैसा कि पहले बताया जा चुका है, दैनिक जीवन में समांतर रेखाओं के अनेक उदाहरण उपलब्ध हैं।

टिप्पणी : हमने देखा कि यदि दो किरणें या रेखाखंड समांतर हैं, तो उनके द्वारा निर्धारित रेखाएँ भी समांतर हैं। हम यह भी कह सकते हैं कि यदि दो रेखाएँ समांतर हैं, तो उन पर स्थित सभी रेखाखंड भी समांतर होंगे। परन्तु यही बात दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बारे में नहीं कही जा सकती। दो प्रतिच्छेदी रेखाओं पर स्थित रेखाखंड प्रतिच्छेदी नहीं भी हो सकते हैं। दूसरे शब्दों में, दो रेखाखंड PQ व RS ऐसे हो सकते हैं कि वे प्रतिच्छेदी न हों, परन्तु उनके द्वारा निर्धारित रेखाएँ एक बिन्दु पर काटती हों जैसा कि आकृति 11.11(i) में दर्शाया गया है।

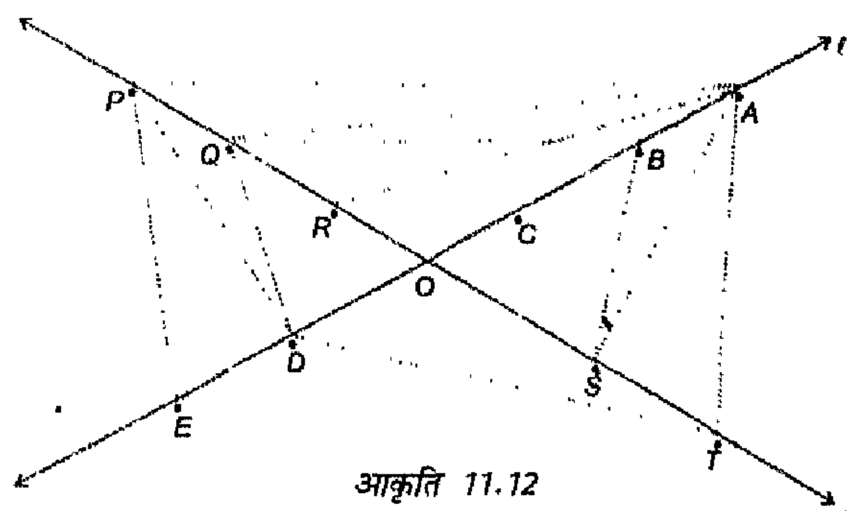


आकृति 11.11

इसी प्रकार की बात किरणों के बारे में भी कही जा सकती है। दो किरणें ऐसी हो सकती हैं जो प्रतिच्छेद न करती हों [आकृति 11.11 (ii)], परन्तु उनके द्वारा निर्धारित रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद कर सकती हैं। आकृति 11.11 (iii) में, रेखाखंड QP किरण MN के साथ प्रतिच्छेदी नहीं है, परन्तु इनके द्वारा निर्धारित रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

11.3.1 दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी

क्रियाकलाप 1: बिन्दु O पर काटती हुई दो रेखाएँ l व m खींचिए। रेखा l पर भिन्न बिन्दु A, B, C, O, D, E तथा m पर बिन्दु P, Q, R, O, S, T अंकित कीजिए (आकृति 11.12)। अब सभी रेखाखंडों जैसे AP, AQ, BQ, BS, DT, DP आदि को

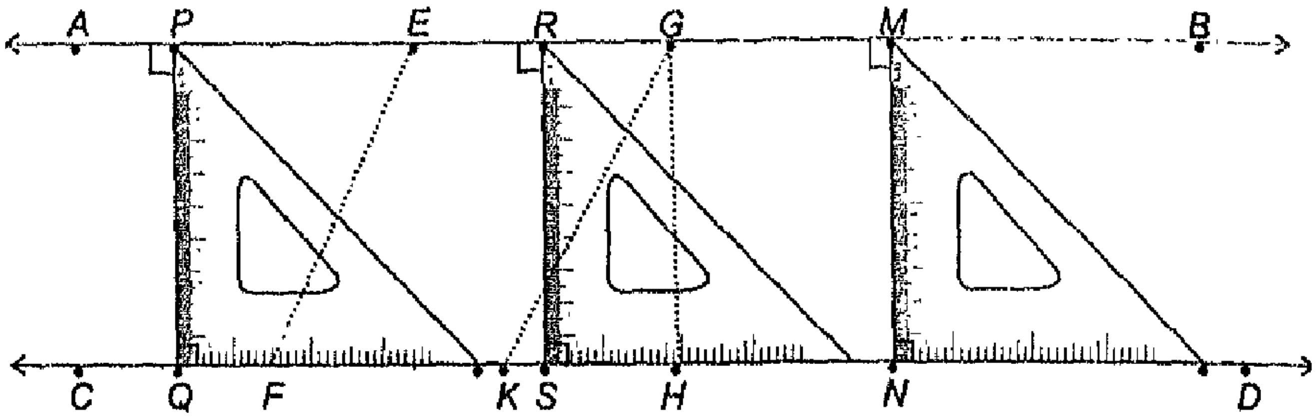


आकृति 11.12

मापिए। आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि कुछ रेखाखंडों की लम्बाइयाँ असमान हैं और कुछ की समान। दूसरे शब्दों में, l व m पर स्थित किन्ही दो बिन्दुओं के बीच की दूरी सभी स्थानों पर समान नहीं है। आप बता सकते हैं कि कब यह दूरी न्यूनतम होगी? स्पष्टतः यह दूरी न्यूनतम होगी, यदि हम l पर स्थित बिन्दु O का चयन करें तथा m पर स्थित बिन्दु O ही लें। इस स्थिति में इन दो बिन्दुओं के बीच की दूरी शून्य होगी। यह *न्यूनतम दूरी (shortest distance)* ही रेखाओं l व m के ***बीच की दूरी*** कहलाती है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच की दूरी शून्य होती है।

क्रियाकलाप 2: एक कागज पर एक पटरी रखिए और उसके विपरीत किनारों के अनुदिश दो रेखाएँ खींचिए तथा पटरी को हटा दीजिए। इस प्रकार हमें दो समांतर रेखाएँ प्राप्त होती हैं। आइए इन रेखाओं को AB व CD नाम देते हैं (आकृति 11.13)।



आकृति 11.13

अब एक सेट्-स्क्वेयर लेकर उसे रेखा CD पर इस प्रकार रखते हैं कि उसके समकोण की एक भुजा CD के अनुदिश रहे और उसके समकोण का शीर्ष रेखा CD के किसी बिन्दु Q के संगत हो जाए। अब सेट्-स्क्वेयर के समकोण की दूसरी भुजा के अनुदिश रेखाखंड PQ इस प्रकार खींचते हैं कि बिन्दु P रेखा AB पर रहे। चाँदे द्वारा कोणों P व Q को माप कर देखा जा सकता है कि $PQ \perp CD$ और $PQ \perp AB$ है। इस प्रकार, PQ दोनों रेखाओं CD व AB पर लम्ब है। इसी प्रकार, हम सेट्-स्क्वेयर को बिन्दुओं S,N,... आदि पर रख कर रेखाखंड RS, MN आदि खींच सकते हैं। पहले की भाँति हम यहाँ भी देखते हैं कि RS, MN, आदि सभी रेखाखंड दोनों रेखाओं AB व CD पर लम्ब हैं। हम इन सभी लम्ब रेखाखंडों PQ, RS, MN, ... आदि को मापते हैं। हम पाएँगे कि ये सभी रेखाखंड बराबर हैं। इस प्रकार,

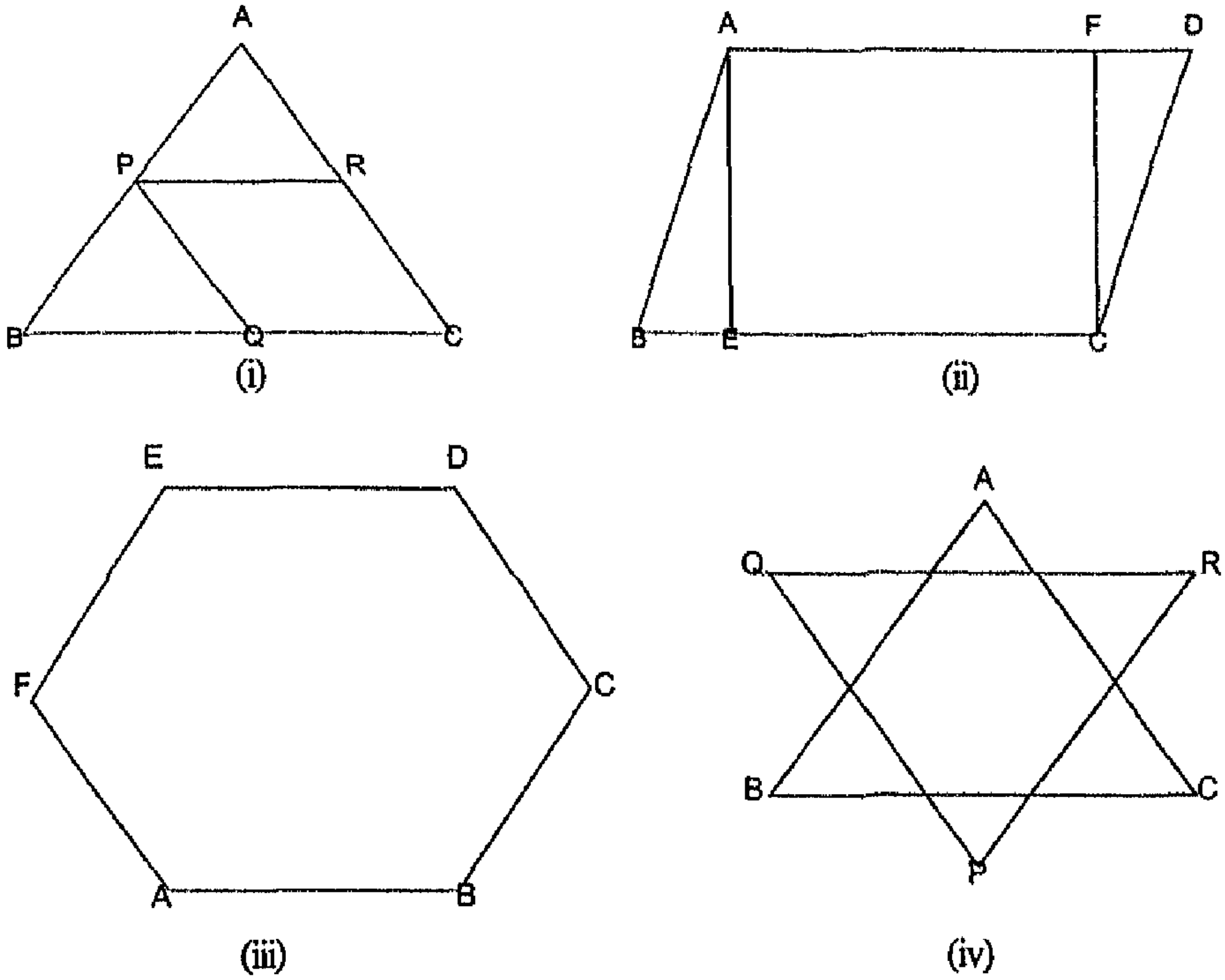
दो समांतर रेखाओं के बीच की लाम्बिक दूरी (perpendicular distance) सभी स्थानों पर समान है।

यदि हम रेखाओं AB व CD पर दो बिन्दु क्रमशः E (या G) और F (या K या H) लें और रेखाखंडों EF, GK, GH आदि को मापें, तो हम पाएँगे कि EF (या GK या GH) या तो लाम्बिक (लम्बवत्) दूरी PQ (या MN या RS) से *बड़ा* है या *बराबर* है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि लम्बवत् दूरी ही दो समांतर रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी है। इस प्रकार, *हम जब भी दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी की बात करते हैं, तो हमारा आशय उनके बीच की लम्बवत् दूरी से होता है।*

●●●

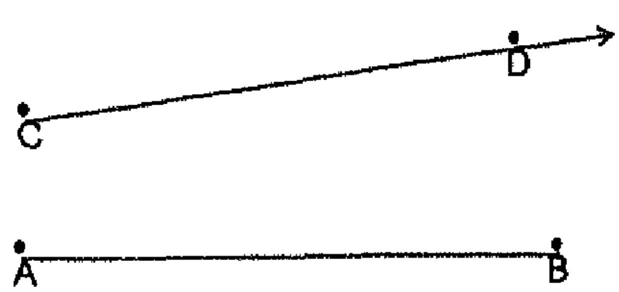
प्रश्नावली 11.2

1. निम्न आकृतियों में से प्रत्येक में समांतर रेखाखंडों के युग्म लिखिए:



आकृति 11.14

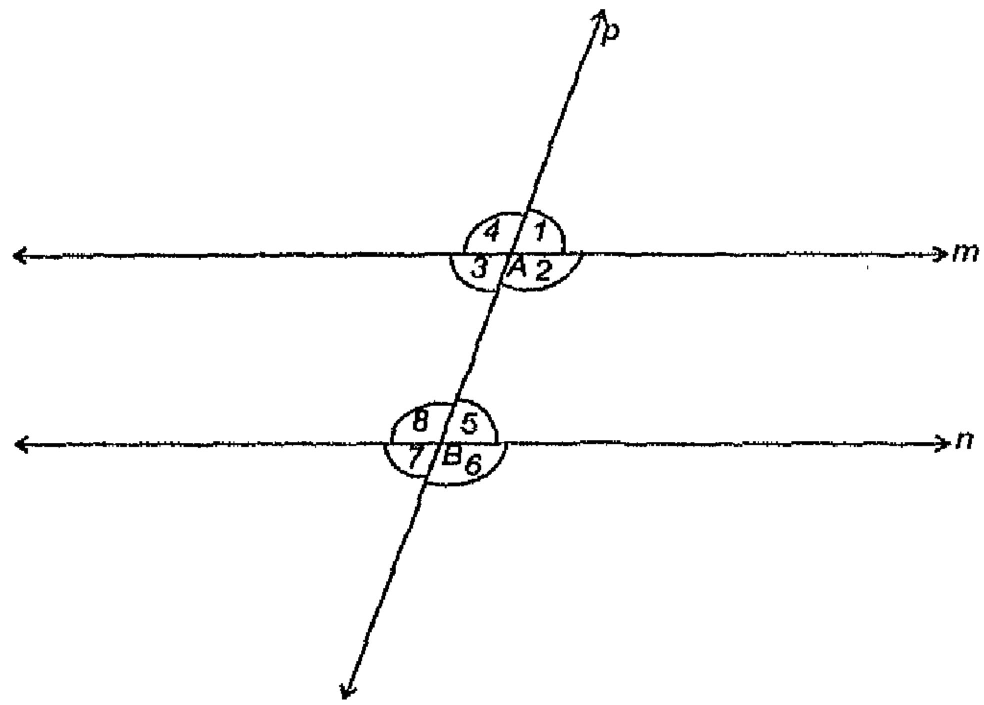
2. आकृति 11.15 में, रेखाखंड AB व किरण CD प्रतिच्छेदी नहीं हैं। क्या आप कह सकते हैं कि ये समांतर हैं? अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।



आकृति 11.15

11.3.2 एक तिर्यक रेखा द्वारा दो समांतर रेखाओं के साथ बनाए गए कोण

क्रियाकलाप 3: मान लीजिए कि एक ही तल में स्थित दो रेखाएँ m व n समांतर हैं तथा p इन रेखाओं की तिर्यक रेखा है (आकृति 11.16)।



आकृति 11.16

क्या आप p द्वारा m व n पर निर्मित संगत कोणों के युग्मों की पहचान कर सकते हैं? अवश्य। संगत कोणों के युग्म हैं: ($\angle 1$, $\angle 5$), ($\angle 2$, $\angle 6$), ($\angle 4$, $\angle 8$) और ($\angle 3$, $\angle 7$) (आकृति 11.16)। $\angle 1$ व $\angle 5$ को मापिए। आप क्या पाते हैं? ये कोण बराबर हैं? हाँ, ये संगत कोण बराबर हैं। इसी प्रकार, संगत कोण $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$ व $\angle 3 = \angle 7$ है। इस प्रकार, हम पाते हैं कि ***यदि दो समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित हों, तो इस प्रकार बने प्रत्येक संगत कोण युग्म के कोण बराबर होते हैं।***

क्या आप तिर्यक रेखा p द्वारा रेखाओं m व n के साथ बने अन्त: एकान्तर कोणों के युग्म पहचान सकते हैं? अवश्य। अन्त: एकान्तर कोणों के युग्म हैं: ($\angle 2$, $\angle 8$) और ($\angle 3$, $\angle 5$)। $\angle 2$ व $\angle 8$ को मापिए। आप क्या पाते हैं? क्या ये बराबर हैं? हाँ, $\angle 2 = \angle 8$ है। इसी प्रकार, माप कर हम देखते हैं कि $\angle 3 = \angle 5$ है। इस प्रकार, हमें दृष्टिगोचर होता है कि

यदि दो समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित हों, तो प्रत्येक अन्त:

एकान्तर कोण युग्म के कोण बराबर होते हैं।

इसी प्रकार, हम तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोणों के युग्मों की पहचान कर सकते हैं। आकृति 11.16 में ये युग्म हैं: ($\angle 2$, $\angle 5$) व ($\angle 3$, $\angle 8$)। इन कोणों को मापने पर हमें ज्ञात होता है कि $\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$ तथा $\angle 3 + \angle 8 = 180^\circ$ है। इस प्रकार, हम देखते हैं कि

यदि दो समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित हों, तो तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोणों का योग 180° होता है। दूसरे शब्दों में, *तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित अन्तः कोण संपूरक होते हैं।*

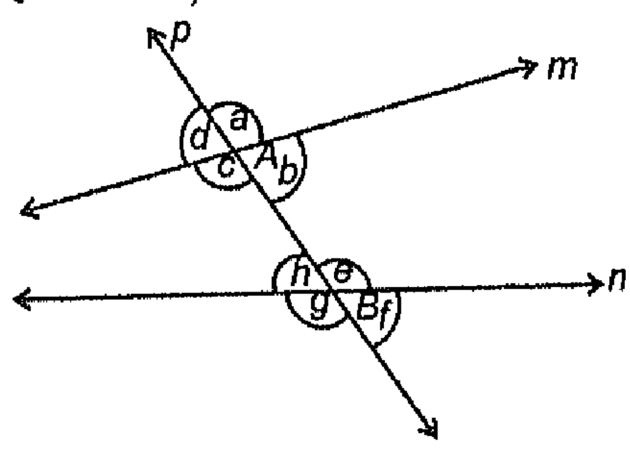
इस प्रकार, हमें दो समान्तर रेखाओं पर उनकी तिर्यक रेखा द्वारा बनाए गए कोणों के निम्न गुण प्राप्त होते हैं:

(i) ***प्रत्येक संगत कोण युग्म के कोण बराबर होते हैं।***

(ii) ***प्रत्येक अन्तः एकान्तर कोण युग्म के कोण बराबर होते हैं।***

(iii) ***तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोणों का योग 180° होता है।***

क्रियाकलाप 4: मान लीजिए m व n दो असमान्तर रेखाएँ हैं और p उनकी तिर्यक रेखा है (आकृति 11.17)।



आकृति 11.17

इस आकृति में संगत कोण युग्मों की पहचान कीजिए। ये हैं: ($\angle a$, $\angle e$), ($\angle b$, $\angle f$), ($\angle d$, $\angle h$), व ($\angle c$, $\angle g$)। इन कोणों को मापिए। क्या $\angle a = \angle e$ है? नहीं। इसी प्रकार, अन्य कोणों को मापने से पता चलता है कि किसी भी युग्म के कोण बराबर नहीं हैं।

अब आकृति 11.17 में अन्तः एकान्तर कोण युग्म पहचानिए। ये ($\angle b, \angle h$) तथा ($\angle c, \angle e$) हैं। यहाँ $\angle b$ व $\angle h$ को मापिए। क्या ये बराबर हैं? नहीं। इसी प्रकार, मापने पर हमें ज्ञात होता है कि $\angle c$ भी $\angle e$ के बराबर नहीं है।

अब इसी आकृति में तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्तः कोण-युग्मों को पहचानिए। ये कोण युग्म ($\angle b, \angle e$) और ($\angle c, \angle h$)हैं। इन कोणों को मापिए और देखिए कि क्या $\angle b + \angle e = 180°$ है। नहीं। इसी प्रकार, $\angle c$ व $\angle h$ का योग भी $180°$ नहीं है। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है कि ***दो असमांतर रेखाओं पर एक तिर्यक रेखा द्वारा निर्मित***

(i) *संगत कोण युग्म के कोण बराबर नहीं होते,*

(ii) *अन्तः एकान्तर कोण युग्म के कोण बराबर नहीं होते, तथा*

(iii) *तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग 180° नहीं होता।*

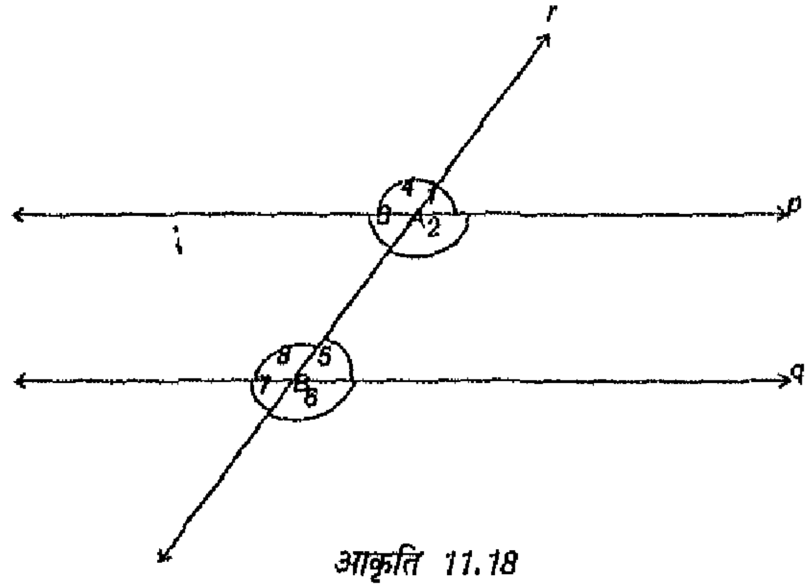
दूसरे शब्दों में, ***यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे, तो वे रेखाएँ समांतर होंगी यदि निम्न तीन प्रतिबंधों में से एक भी संतुष्ट हो जाता है:***

(i) ***संगत कोण युग्म के कोण बराबर हैं।***

(ii) ***अन्तः एकान्तर कोण युग्म के कोण बराबर हैं।***

(iii) ***तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग 180° है।***

उदाहरण 1 : आकृति 11.18 में, रेखाएँ p व q समांतर हैं तथा r तिर्यक रेखा है। यदि $\angle 3 = 55°$ है, तो अन्य कोणों का माप ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.18

हल: $\angle 3 = 55^\circ$ दिया है।

चूँकि $\angle 7$ और $\angle 3$ संगत कोण हैं,

अत: $\angle 7 = \angle 3 = 55^\circ$ ($p \| q$ तथा r तिर्यक रेखा है)

$\angle 3$ व $\angle 2$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं।

अत: $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

अब $\angle 2$ व $\angle 6$ संगत कोण हैं।

अत: $\angle 6 = \angle 2 = 125^\circ$ ($p \| q$ तथा r तिर्यक रेखा है)

इसी प्रकार, $\angle 3$ व $\angle 5$ अन्त: एकान्तर कोण हैं।

इसलिए $\angle 5 = \angle 3 = 55^\circ$ ($p \| q$ तथा r तिर्यक रेखा है)

$\angle 3$ व $\angle 8$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित अन्त: कोण हैं।

इसलिए $\angle 3 + \angle 8 = 180^\circ$ ($p \| q$ तथा r तिर्यक रेखा है)

अर्थात् $\angle 8 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

चूँकि $\angle 4$ व $\angle 8$ संगत कोण हैं,

अत: $\angle 4 = \angle 8 = 125^\circ$ ($p \| q$ तथा r तिर्यक रेखा है)

$\angle 1$ व $\angle 5$ भी संगत कोण हैं।

इसलिए $\angle 1 = \angle 5 = 55^\circ$ ($p \| q$ तथा r तिर्यक रेखा है)

इस प्रकार,

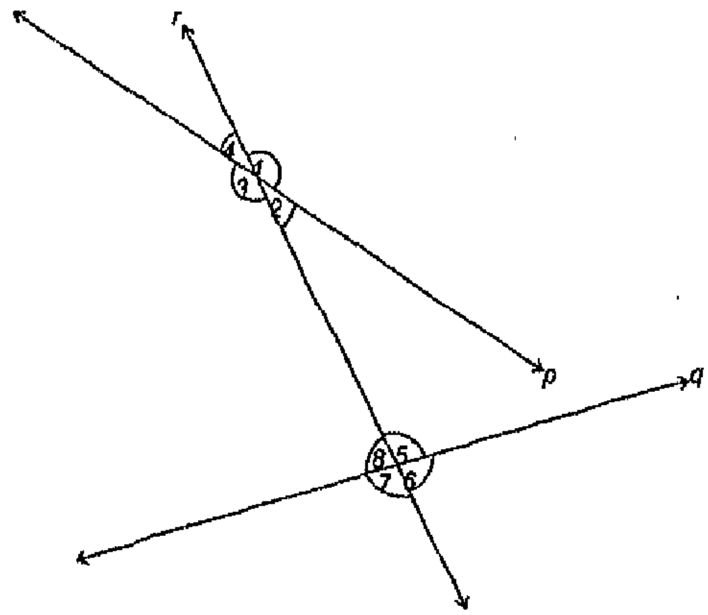
$\angle 1 = 55^\circ$, $\angle 5 = 55^\circ$, $\angle 7 = 55^\circ$, $\angle 2 = 125^\circ$, $\angle 6 = 125^\circ$,
$\angle 4 = 125^\circ$ व $\angle 8 = 125^\circ$ है।

उदाहरण 2: आकृति 11.19 में, $\angle 1 = 150^\circ$ और $\angle 8 = 80^\circ$ है। क्या रेखा p रेखा q के समांतर है?

हल : $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

साथ ही, $\angle 8 = 80^\circ$ दिया है। इस प्रकार $\angle 2$ व $\angle 8$, जो कि अन्त: एकान्तर कोण हैं, बराबर नहीं हैं।



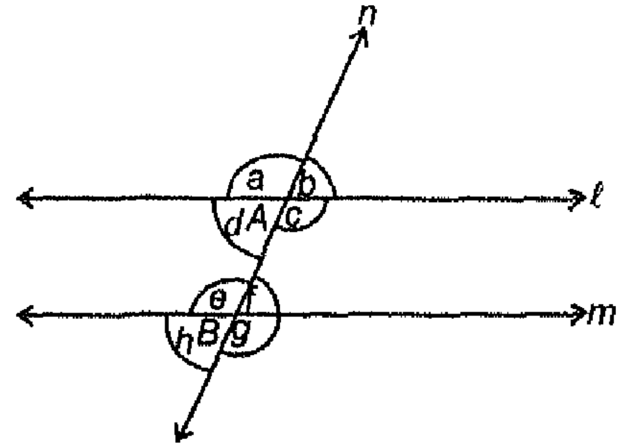
आकृति 11.19

अतः रेखाएँ p व q समांतर नहीं हैं।

●●●

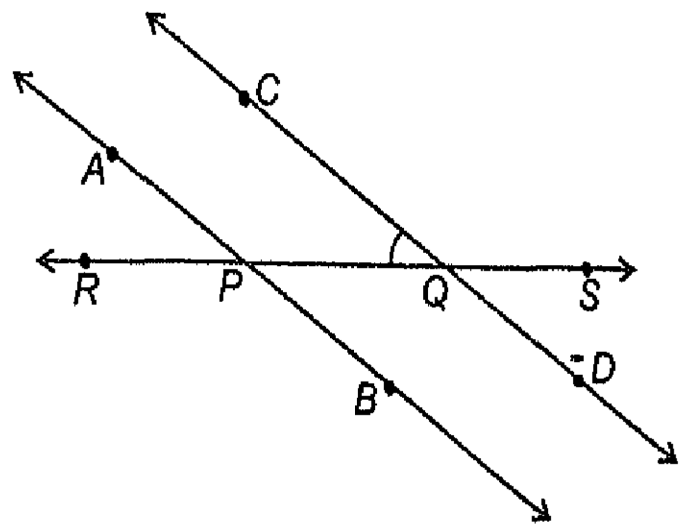
प्रश्नावली 11.3

1. आकृति 11.20 में, रेखा l रेखा m के समांतर है तथा n इनकी तिर्यक रेखा है। यदि $\angle b = 65°$ है, तो अन्य सभी कोण ज्ञात कीजिए।



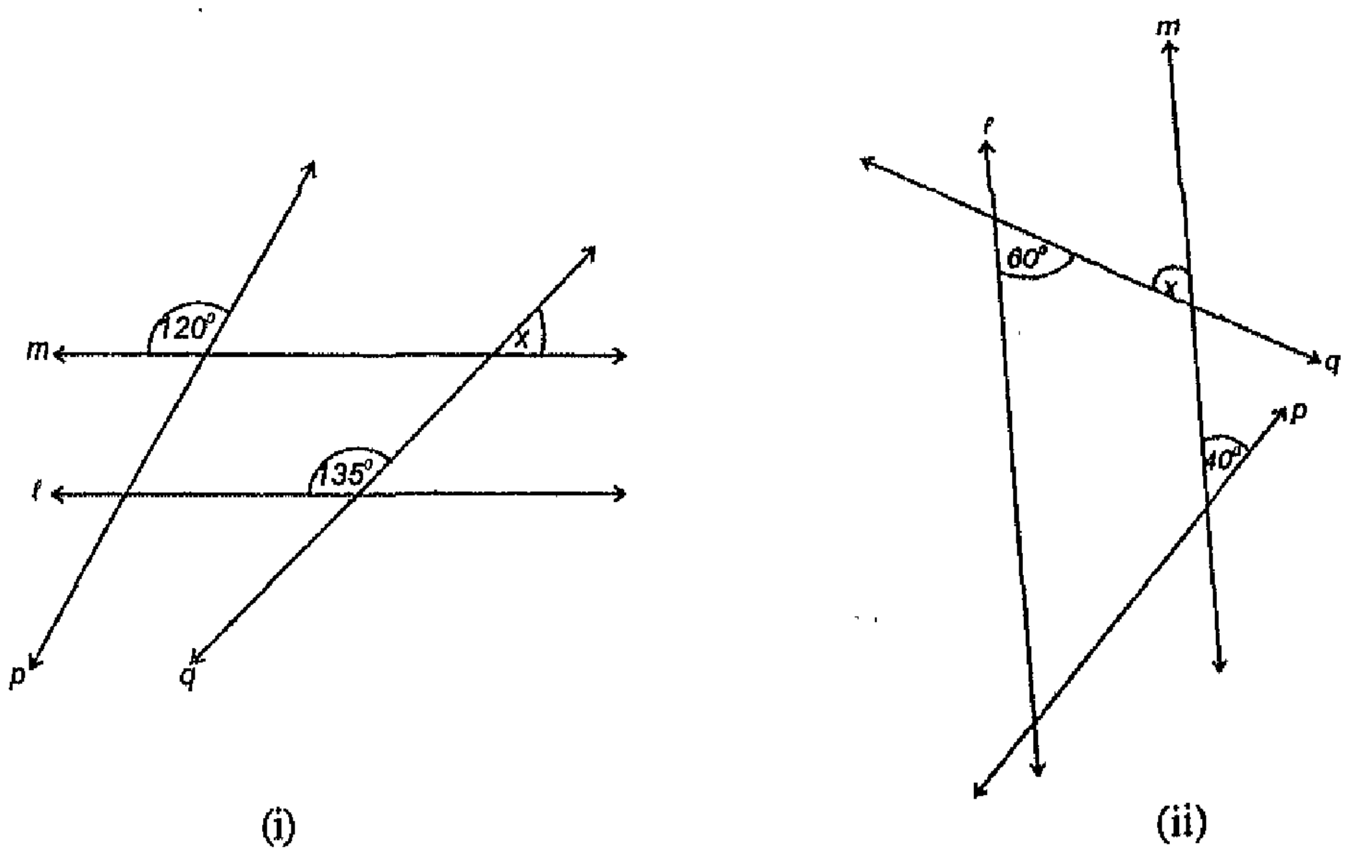
आकृति 11.20

2. आकृति 11.21 में, रेखा AB रेखा CD के समांतर है और RS एक तिर्यक रेखा है, जो AB व CD को क्रमशः P व Q पर काटती है। यदि $\angle PQC = 35°$ है, तो $\angle RPB$ ज्ञात कीजिए।



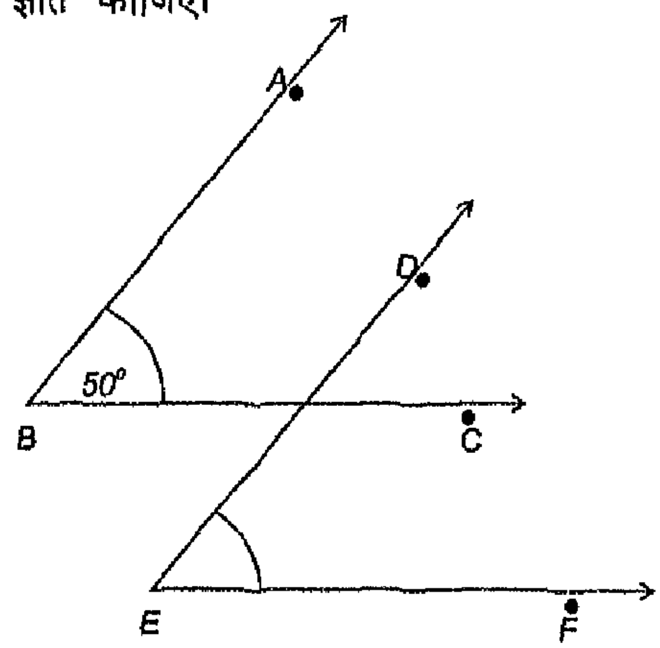
आकृति 11.21

3. आकृति 11.22 में x का मान ज्ञात कीजिए, यदि $l \parallel m$ है।



आकृति 11.22

4. आकृति 11.23 में, दोनों कोणों की भुजाएँ समांतर हैं। यदि $\angle ABC = 50^\circ$ है, तो $\angle DEF$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.23

याद रखने योग्य बातें

1. एक रेखा जो दो या दो से अधिक दी हुई रेखाओं को भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, ***तिर्यक रेखा*** कहलाती है।
2. एक ही तल में स्थित ऐसी रेखाएँ जो प्रतिच्छेदी न हों ***समांतर रेखाएँ*** कहलाती हैं।
3. दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच की दूरी शून्य होती है।
4. दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी प्रत्येक स्थान पर समान होती है तथा यह दोनों के बीच की लाम्बिक लम्बवत् (दूरी) होती है।
5. यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे, तो
   (i) संगत कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण बराबर होते हैं।
   (ii) एकान्तर कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण बराबर होते हैं।
   (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्त: कोण संपूरक होते हैं।

6. यदि दो असमांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे, तो ऊपर दिए गए कथन 5 के (i), (ii) और (iii) सत्य नहीं है।

7. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे और निम्नलिखित में से कोई भी एक सत्य हो:

(i) संगत कोणों के एक युग्म के कोण बराबर हैं।

(ii) एकान्तर कोणों के एक युग्म के कोण बराबर हैं।

(iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतः कोण संपूरक हैं।

तो रेखाएँ समांतर होती हैं।

त्रिभुज

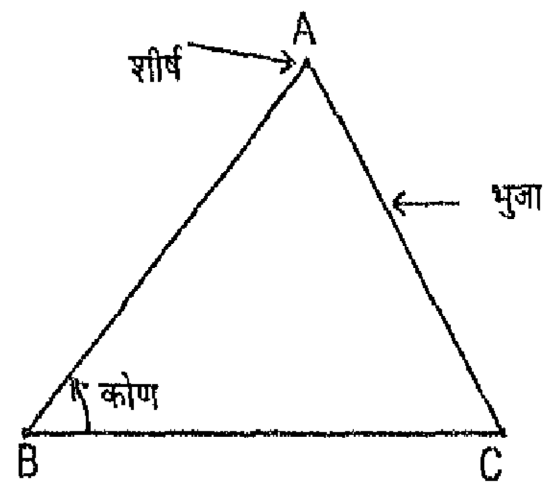
अध्याय 12

12.1 भूमिका

ज्यामिति में सर्वाधिक पाई जाने वाली आकृति त्रिभुज है। इस आकृति का चित्रकला, स्थापत्य कला, शिल्प कला एवं अभियांत्रिकी में बहुतायत से प्रयोग होता है। त्रिभुज के स्वरूप में कोई भी परिवर्तन भुजाओं में परिवर्तन किए बिना नहीं हो सकता। इसलिए अधिकांश निर्माण कार्यों, विशेष रूप से पुल व स्तम्भों में इस आकृति का प्रयोग स्थायित्व एवं दृढ़ता प्रदान करने के लिए किया जाता है। इस अध्याय में, हम त्रिभुज के भाग, त्रिभुजों का वर्गीकरण एवं त्रिभुजों के कुछ गुणों का अध्ययन करेंगे।

12.2 त्रिभुज के शीर्ष, भुजाएँ एवं कोण

मान लीजिए A, B व C तीन ***भिन्न असंरेखी बिन्दु*** हैं। इन तीनों बिंदुओं को युग्मों में लेकर जोड़ने से बने तीनों रेखाखंडों AB, BC व CA से बनी आकृति को ***त्रिभुज** (triangle)* कहते हैं (आकृति 12.1)। संकेत Δ एक त्रिभुज को निरूपित करने के लिए प्रयुक्त होता है। इस प्रकार 'Δ ABC' को 'त्रिभुज ABC' पढ़ा जाता है। तीनों बिन्दु A,B व C इस त्रिभुज के ***शीर्ष** (vertices)* कहलाते हैं। तीनों रेखाखंड AB, BC व CA, Δ ABC की ***भुजाएँ** (sides)* कहलाती हैं। कोण ABC, BCA व CAB इस त्रिभुज के ***कोण*** कहलाते हैं।



आकृति 12.1

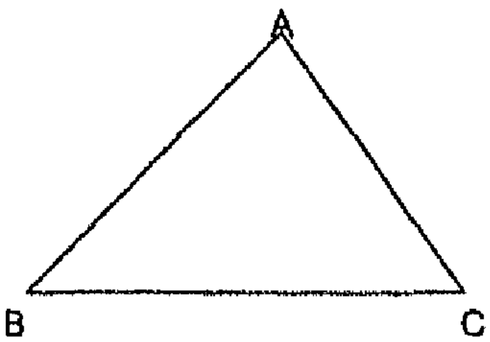
इस प्रकार, तीन भुजाएँ एवं तीन कोण, मिलकर त्रिभुज के छः ***भाग** (parts)* अथवा ***अवयव** (elements)* कहलाते हैं। त्रिभुज की दो भुजाओं के बीच एक कोण

तथा दो कोणों के बीच एक भुजा सदैव विद्यमान होती है। भुजाओं के प्रत्येक युग्म में एक शीर्ष उभयनिष्ठ होता है।

टिप्पणी :कोई अस्पष्टता न होने पर, हम त्रिभुज के कोणों BAC, ABC और BCA के लिए क्रमशः $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ का प्रयोग भी कर सकते हैं।

12.2.1 शीर्ष की सम्मुख भुजा व भुजा का सम्मुख शीर्ष

आकृति 12.2 में हम देखते हैं कि भुजाएँ AB व AC शीर्ष A पर मिलती हैं। शेष बची भुजा BC इस शीर्ष A की ***सम्मुख भुजा*** *(opposite side)* कहलाती है और शीर्ष A इस भुजा BC का ***सम्मुख शीर्ष*** *(opposite vertex)* कहलाता है। इसी प्रकार, CA शीर्ष B की सम्मुख भुजा है तथा शीर्ष B भुजा CA का सम्मुख शीर्ष है। साथ ही, भुजा AB शीर्ष C की सम्मुख भुजा है तथा शीर्ष C, AB का सम्मुख शीर्ष है।

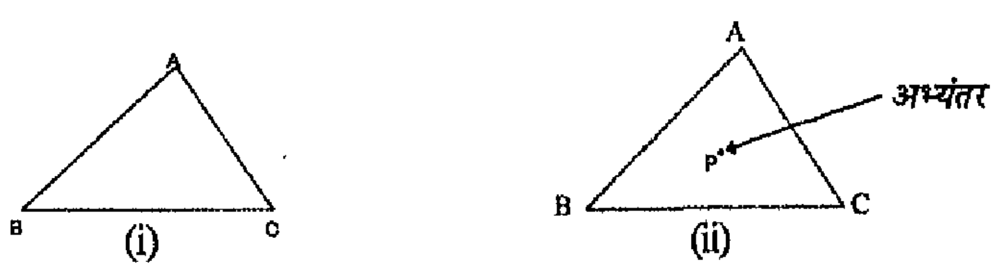


आकृति 12.2

12.3 किसी त्रिभुज का अभ्यंतर एवं बहिर्भाग

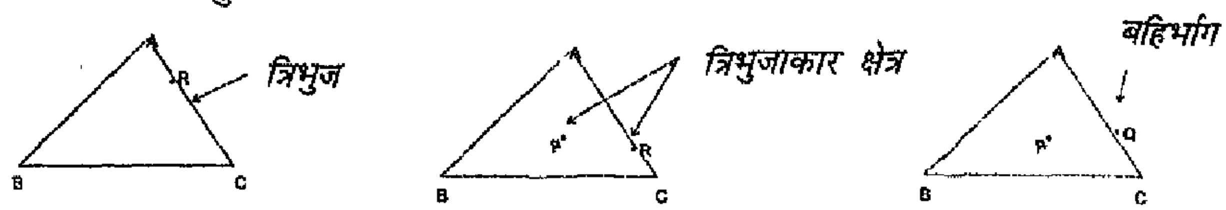
किसी भवन, मकान या मैदान के लिए, हम उसके अन्दर व बाहर के बारे में बात करते हैं। हम किसी खिलाड़ी के खेल के मैदान से बाहर या उसके अन्दर होने की बात करते हैं। हम हॉकी के एक मैदान और उसकी परिसीमा की बात करते हैं। इस परिसीमा या सीमा रेखा के जो अन्दर है वह उसके अभ्यंतर में है तथा जो कुछ इस सीमा रेखा से बाहर है वह उसके बहिर्भाग में है।

यदि कोई खिलाड़ी अन्दर से बाहर या बाहर से अन्दर आना चाहता है, तो उसे सीमा रेखा या परिसीमा को पार करना होगा। आइए इस विचार को हम त्रिभुज के अभ्यंतर व बहिर्भाग पर लागू करते हैं।



आकृति 12.3

हम एक कागज पर त्रिभुज ABC बनाते हैं [आकृति 12.3 (i)]। यह त्रिभुज तल के सभी बिन्दुओं को तीन भागों में बाँटता है :



(iii) (iv) (v)

आकृति 12.3

(i) तल का वह भाग जिसमें P जैसे सभी बिन्दु हैं त्रिभुज का ***अभ्यंतर*** *(interior)* कहलाता है [आकृति 12.3(ii)]।

(ii) तल का वह भाग जिसमें R जैसे सभी बिन्दु हैं स्वयं ***त्रिभुज*** कहलाता है [आकृति 12.3(iii)]।

(iii) त्रिभुज का अभ्यंतर एवं स्वयं त्रिभुज मिलकर ***त्रिभुजाकार क्षेत्र*** *(triangular region)* ABC कहलाता है [आकृति 12.3(iv)]।

(iv) तल का वह भाग जिसमें Q जैसे सभी बिन्दु सम्मिलित हैं त्रिभुज का ***बहिर्भाग*** *(exterior)* कहलाता है [आकृति 12.3(v)]।

आकृति 12.3 (v) में, हम देखते हैं कि त्रिभुज की भुजाओं को पार किए बिना हम P से Q या Q से P तक नहीं जा सकते।

●●●

प्रश्नावली 12.1

1. निम्न कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार कीजिए कि कथन सत्य बन जाए:

    (i) एक त्रिभुज के -------- शीर्ष होते हैं।

    (ii) एक त्रिभुज की -------- भुजाएँ होती हैं।

    (iii) एक त्रिभुज के --------- कोण होते हैं।

    (iv) एक त्रिभुज के --------- भाग होते हैं।

2. क्या तीन संरेखी बिन्दु A,B व C एक त्रिभुज बनाते हैं?

3. तीन असंरेखी बिन्दु L,M और N लीजिए तथा LM, MN, NL को जोड़िए।

आपको कौन सी आकृति प्राप्त होती है? उसका नाम बताइए।

4. उपर्युक्त प्रश्न 3 में निम्न के नाम दीजिए:

   (a) $\angle M$ की सम्मुख भुजा (b) भुजा LM का सम्मुख कोण

   (c) भुजा NL का सम्मुख शीर्ष (d) शीर्ष N की सम्मुख भुजा

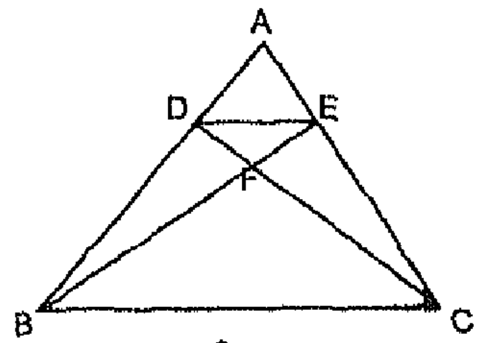
5. आकृति 12.4 में कितने विभिन्न त्रिभुज बने हैं? प्रत्येक का नाम लिखिए।

6. आकृति 12.4 में, उन त्रिभुजों के नाम लिखिए जिनका एक शीर्ष है:

   (i) बिन्दु A (ii) बिन्दु B

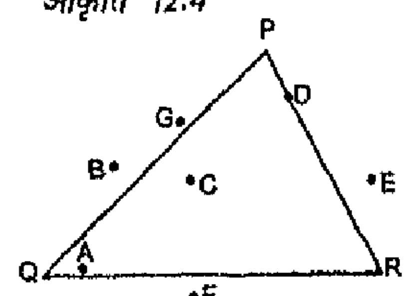
   (iii) बिन्दु C (iv) बिन्दु D

   (v) बिन्दु E (vi) बिन्दु F



आकृति 12.4

7. आकृति 12.4 के कौन से ऐसे त्रिभुज हैं जिनके लिए B बहिर्भाग में स्थित है? जिनके लिए D कम से कम उनकी एक भुजा पर स्थित है?



आकृति 12.5

8. आकृति 12.5 में उन बिन्दुओं के नाम बताइए जो त्रिभुजाकार क्षेत्र PQR में स्थित हैं। इनमें से कौन से बिन्दु Δ PQR पर स्थित हैं?

9. आकृति 12.6 में निहित सभी भिन्न त्रिभुजों के नाम लिखिए।

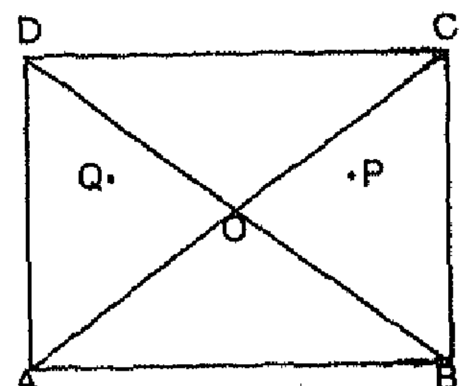
   (i) किन त्रिभुजों के लिए P उनके अभ्यंतर में स्थित है?

   (ii) किन त्रिभुजों के लिए Q उनके अभ्यंतर में स्थित है?

   (iii) किन त्रिभुजों के लिए A उनके बहिर्भाग में स्थित है?

   (iv) किन त्रिभुजों के लिए O उनके अभ्यंतर स्थित है?

   (v) किन त्रिभुजों के लिए O उनके बहिर्भाग में स्थित है?



आकृति 12.6

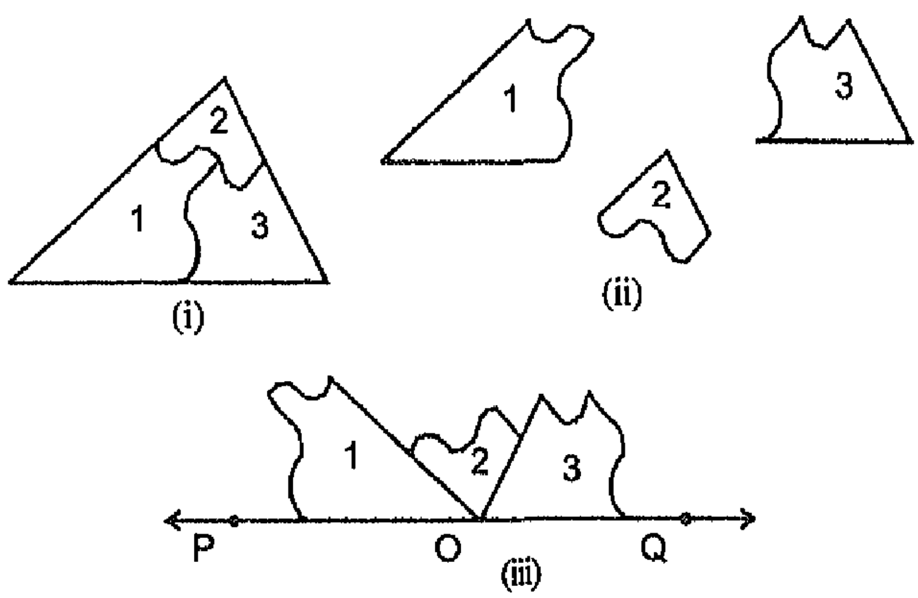
12.4 त्रिभुज के गुण

अब हम त्रिभुज के कुछ गुणों का सत्यापन कुछ क्रियाकलापों द्वारा करेंगे।

12.4.1 कोणों के योग का गुण

क्रियाकलाप 1 : इस क्रियाकलाप *(कागज काटने का एक क्रियाकलाप)* के लिए आपको पेंसिल, कैंची तथा एक मोटे कागज की आवश्यकता होगी। इसको करने के लिए विभिन्न चरण इस प्रकार हैं :

1. एक मोटे कागज, जैसे पुराना ग्रीटिंग कार्ड, विवाह-शादी का निमन्त्रण पत्र आदि, पर एक त्रिभुज बनाइए। इसके कोणों को $\angle 1, \angle 2$ व $\angle 3$ से नामांकित कीजिए (आकृति 12.7 (i))।



आकृति 12.7

2. त्रिभुजाकार क्षेत्र को कैंची द्वारा काट कर अलग कर लेते हैं। अब इस क्षेत्र को तीन भागों में इस प्रकार से काट लेते हैं कि प्रत्येक भाग ΔABC का एक कोण 1, 2 व 3 निरूपित करे जैसा कि आकृति 12.7 (ii) में दर्शाया गया है।

3. अब एक रेखा POQ खींचिए तथा तीनों कटे हुए भागों को इस प्रकार रखिए कि सभी का शीर्ष O पर हो जैसा कि आकृति 12.7 (iii) में दिखाया गया है। कोणों के ये भाग इस प्रकार रखें कि न तो उनके बीच कोई रिक्त स्थान रहे और न ही वे एक दूसरे पर आच्छादित हों।

हम देखते हैं कि तीनों कोण मिलकर एक ऋजु कोण QOP बनाते हैं। चूँकि ऋजु कोण का माप 180° होती है, अतः तीनों कोणों का योग भी 180° हुआ।

इस प्रयोग को पृथक रूप से कई त्रिभुज बनाकर दोहराइए। प्रत्येक बार हम देखेंगे कि तीनों कोणों का योग 180° ही है। इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं:

गुण I : ***त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° (या दो समकोण) होता है।*** प्रायः इस गुण को 'त्रिभुज के कोणों के योग का गुण' कहते हैं।

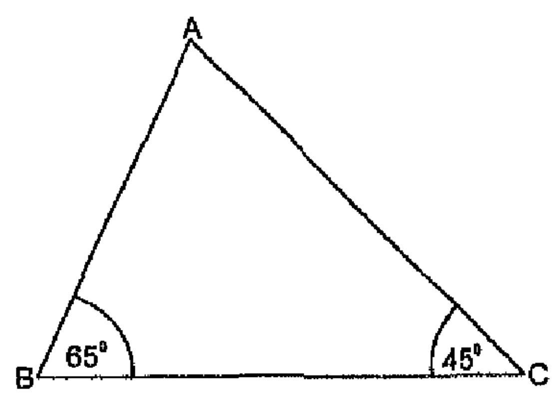
टिप्पणी : इस गुण के सत्यापन की जाँच, हम भिन्न त्रिभुज लेकर तथा उनके कोणों को चाँदे द्वारा माप कर भी कर सकते हैं।

उदाहरण 1: एक त्रिभुज के दो कोणों के माप 65° और 45° हैं। तीसरे कोण का माप ज्ञात कीजिए।

हल : Δ ABC में,

$\angle B = 65^\circ$ तथा $\angle C = 45^\circ$ है (आकृति 12.8)।

$\therefore \quad \angle B + \angle C = 65^\circ + 45^\circ = 110^\circ \quad (1)$



आकृति 12.8

अब त्रिभुज के कोणों के योग के गुण से, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ है।

इसलिए, समीकरण (1) का प्रयोग करने पर,

$$\angle A + 110^\circ = 180^\circ$$

इस प्रकार, $\angle A = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

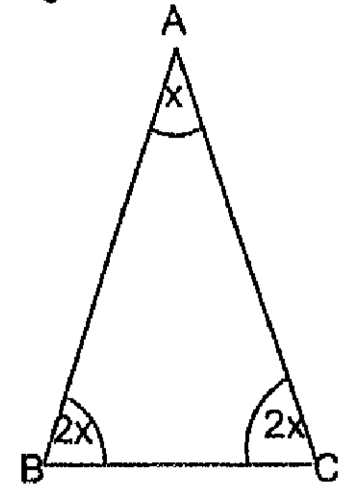
उदाहरण 2: एक त्रिभुज के दो बराबर कोणों में से प्रत्येक तीसरे कोण का दुगुना है। त्रिभुज के कोणों को ज्ञात कीजिए।।

हल : मान लीजिए कि त्रिभुज का छोटा कोण x^o का है। तब त्रिभुज के शेष दो कोणों में से प्रत्येक $2x^o$ का होगा। अब त्रिभुज के कोणों के योग के गुण से,

$$x + 2x + 2x = 180$$

या $5x = 180$

या $x = 36$

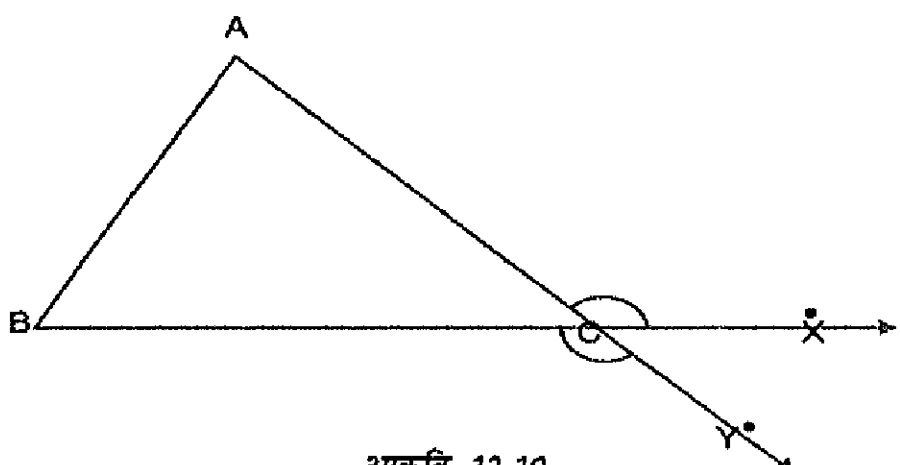


आकृति 12.9

इस प्रकार त्रिभुज के कोण 36°, 72° और 72° हैं।

12.4.2 त्रिभुज का बाह्य कोण

मान लीजिए कि ΔABC की भुजा BC को बिन्दु X तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि X किरण BC पर स्थित है, जैसा कि आकृति 12.10 में दिखाया गया है।



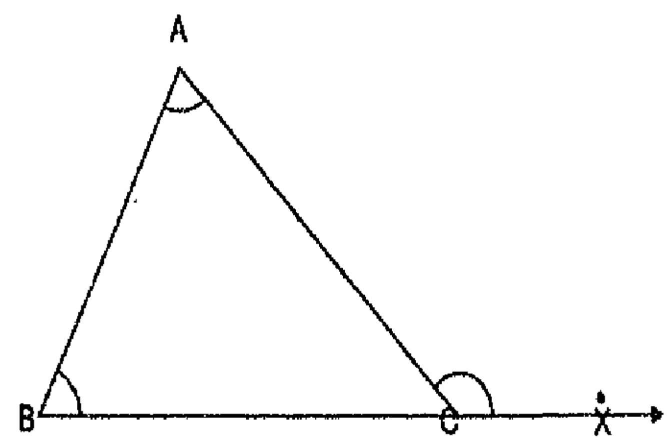
आकृति 12.10

इस प्रकार बने ∠ACX को ΔABC का C पर ***बाह्य कोण*** *(exterior angle)* कहते हैं। त्रिभुज का कौन सा कोण, ∠ACX का आसन्न कोण है? यह कोण ∠ACB है। क्या ∠A व ∠B, ∠ACX के आसन्न कोण हैं? नहीं, ये आसन्न कोण नहीं हैं। इस प्रकार, Δ ABC के शीर्ष C पर बने बाह्य कोण ∠ ACX के सापेक्ष ∠ACB ***आसन्न अन्तः कोण*** *(interior adjacent angle)* है। शेष दोनों कोण

अर्थात् $\angle A$ व $\angle B$ जो आसन्न अन्तः कोण नहीं हैं, $\angle ACX$ के सापेक्ष *अन्तः अभिमुख कोण (interior opposite angles)* कहलाते हैं।

इसी प्रकार, यदि भुजा AC को बढ़ाकर उस पर स्थित कोई बिन्दु Y लिया जाए, तो $\angle BCY$ भी ΔABC का C पर एक बाह्य कोण है। क्या $\angle BCY$ और $\angle ACX$ बराबर हैं? हाँ, क्योंकि ये शीर्षाभिमुख कोण हैं। इस प्रकार एक त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष पर दो बाह्य कोण होते हैं जो एक दूसरे के बराबर होते हैं। $\angle ACX$ के समान ही $\angle BCY$ के सापेक्ष $\angle ACB$ आसन्न अन्तः कोण है तथा $\angle A$ व $\angle B$ दो अन्तः अभिमुख कोण हैं।

क्रियाकलाप 2 : एक त्रिभुज ABC बनाइए तथा भुजा BC को बढ़ाते हुए बाह्य कोण ACX बनाइए (आकृति 12.11)। अब बाह्य कोण ACX को चाँदे की सहायता से मापिए। साथ ही, अन्तः अभिमुख कोणों A व B को भी मापिए और इनका योग ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि $\angle ACX = \angle A + \angle B$ है।



आकृति 12.11

हम इस प्रयोग को अन्य कई त्रिभुज लेकर दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार हमें यही परिणाम प्राप्त होगा। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है:

गुण II : ***किसी त्रिभुज में एक बाह्य कोण दोनों अन्तः अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।***

उदाहरण 3 : आकृति 12.12 में कुछ कोणों के माप दिए गए हैं। x और y के मान ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में B पर बाह्य कोण CBP तथा आसन्न अन्तः कोण CBA एक रैखिक युग्म बनाते हैं। इसलिए

$$\angle CBP + \angle CBA = 180^\circ$$

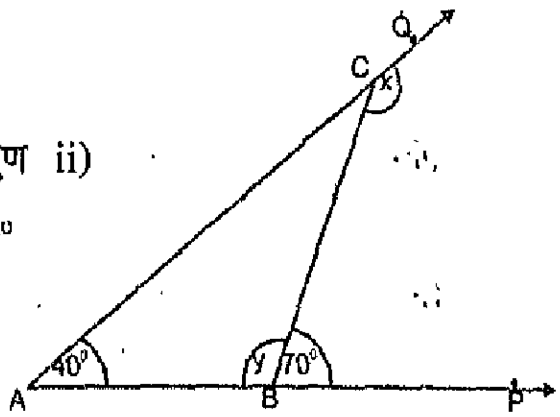
या $$70^\circ + y = 180^\circ$$

या $y = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

पुनः $\angle BCQ = \angle CAB + \angle CBA$ (गुण ii)

या $x = 40^\circ + y = 40^\circ + 110^\circ = 150^\circ$

इस प्रकार, $x = 150^\circ$ तथा $y = 110^\circ$ है।



आकृति 12.12

12.4.3 एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग

क्रियाकलाप 3 :

1. तीन त्रिभुज T_1, T_2, T_3 नाम देते हुए बनाइए।
2. तीनों त्रिभुजों के शीर्ष A, B, C से दर्शाइए।
3. प्रत्येक त्रिभुज के लिए भुजाओं AB, BC व CA को मापिए तथा योग AB + BC, BC + CA व CA + AB ज्ञात कीजिए। आप क्या पाते हैं? क्या तीनों त्रिभुजों T_1, T_2, T_3 के लिए,

(i) $AB + BC > CA$ है? (ii) $BC + CA > AB$ है? (iii) $CA + AB > BC$ है?

हाँ। सभी त्रिभुजों के लिए ये तीनों ही संबंध (i), (ii) व (iii) सत्य है। इस प्रकार हमें निम्न गुण प्राप्त होता है:

गुण III : ***एक त्रिभुज की किन्हीं भी दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।***

उदाहरण 4: लिखिए कि निम्न में कौन सी संख्याएँ एक त्रिभुज की सम्भावित भुजाएँ (सेमी में) हो सकती हैं:

(i) 5, 12, 13 (ii) 3, 4, 7 (iii) 13, 14, 28 (iv) 13, 14, 25

हल:

(i) क्योंकि $5 + 12 > 13$, $12 + 13 > 5$ व $13 + 5 > 12$ है; अतः 5, 12 व 13 एक त्रिभुज की भुजाओं की माप हो सकती हैं।

(ii) यहाँ $4 + 3 = 7$ है। अर्थात् यहाँ गुण III संतुष्ट नहीं होता है। अत: 4, 3 व 7 किसी त्रिभुज की भुजाओं की माप नहीं हो सकतीं।

(iii) यहाँ $13 + 14 < 28$ है। अर्थात् गुण III संतुष्ट नहीं होता है। अत: 13, 14 व 28 किसी त्रिभुज की भुजाएँ नहीं हो सकतीं।

(iv) यहाँ $13 + 14 > 25, 13 + 25 > 14$ तथा $14 + 25 > 13$ है। अत: 13, 14 व 25 एक त्रिभुज की भुजाओं की माप हो सकती हैं।

प्रश्नावली 12.2

1. एक त्रिभुज के कोण 57°, 62° व 61° हैं। इस त्रिभुज के लिए कोणों के योग के गुण की सत्यता की जाँच कीजिए।

2. निम्न में से प्रत्येक में तीन कोणों के माप दिए गए हैं। लिखिए किन दशाओं में ये कोण किसी त्रिभुज के संभावित कोण हो सकते हैं:

   (i) $53^\circ, 73^\circ, 83^\circ$ (ii) $30^\circ, 40^\circ, 110^\circ$ (iii) $59^\circ, 12^\circ, 109^\circ$

   (iv) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (v) $30^\circ, 120^\circ, 30^\circ$ (vi) $45^\circ, 61^\circ, 73^\circ$

3. निम्न में से प्रत्येक में एक त्रिभुज के दो कोण दिए हैं। तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।

   (i) $30^\circ, 60^\circ$ (ii) $45^\circ, 45^\circ$

   (iii) $20^\circ, 70^\circ$ (iv) $35^\circ, 55^\circ$

   क्या प्रत्येक दशा में तीसरा कोण पहले दो कोणों के योग के बराबर है?

4. एक त्रिभुज का एक कोण शेष दो कोणों के योग के बराबर है। वह कोण कितना है?

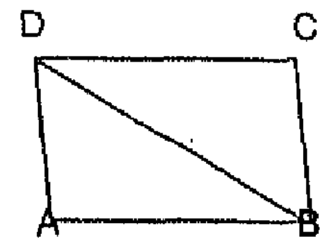
5. एक त्रिभुज का तीसरा कोण ज्ञात कीजिए, यदि शेष दो कोण 104° व 30° हैं।

6. एक त्रिभुज के तीनों कोण बराबर हैं। प्रत्येक कोण का माप क्या है?

7. एक त्रिभुज का एक कोण 160° है तथा शेष दो कोण बराबर हैं। प्रत्येक कोण का माप क्या है?

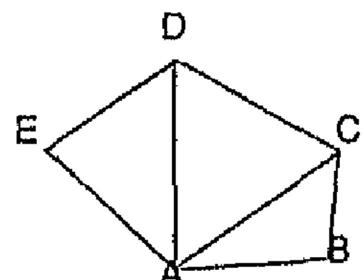
8. दो त्रिभुज एक साथ मिलकर संलग्न आकृति (आकृति 12.13) का निर्माण करते हैं।

$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA$ ज्ञात कीजिए।



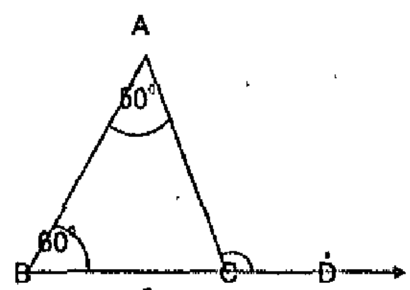
आकृति 12.13

9. आकृति 12.14 में, कोणों EAB, ABC, BCD, CDE व DEA का योग ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.14

10. आकृति 12.15 में, $\angle A$ व $\angle B$ दिए हुए हैं। $\angle ACD$ ज्ञात कीजिए।

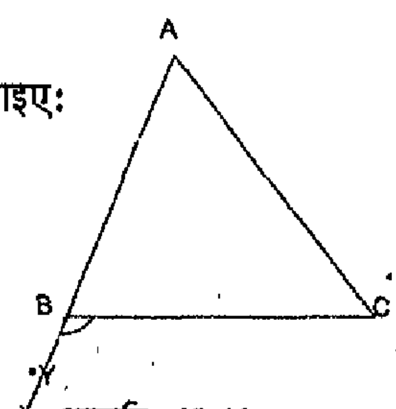


आकृति 12.15

11. आकृति 12.16 में $\angle CBY$, ΔABC का B पर बाह्य कोण है। $\angle CBY$ के सापेक्ष बताइए:

(i) अन्त: आसन्न कोण

(ii) अन्त: अभिमुख कोण



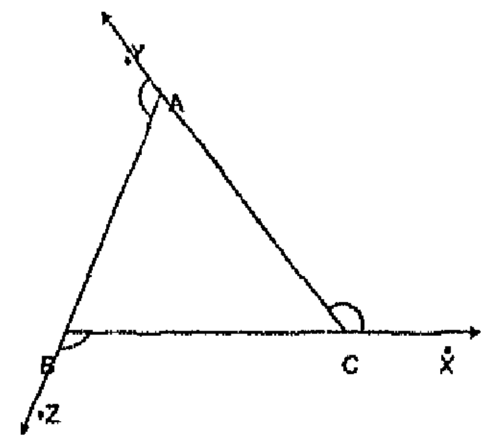
आकृति 12.16

12. आकृति 12.17 में, ΔABC की भुजाएँ क्रम से बढ़ाई गई हैं। निम्न में से प्रत्येक कथन को पूरा कीजिए:

(i) $\angle ACX = \angle CAB +$ --------------

(ii) $\angle BAY$ = ------------ + ------------

(iii) $\angle CBZ$ = ------------ + ------------



आकृति 12.17

13. किसी त्रिभुज का एक बाह्य कोण 80° का है तथा दोनों अन्तः अभिमुख कोण परस्पर बराबर हैं। इन दोनों बराबर कोणों में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए।

14. एक कागज पर एक ΔABC बनाइए तथा BC को बढ़ाकर इस बढ़े हुए भाग पर बिन्दु X अंकित कीजिए। ΔABC का अक्स कागज पर अक्स खींचिए। कोणों को उचित प्रकार काट कर तथा चिपका कर दिखाइए कि $\angle ACX = \angle A + \angle B$ है।

15. क्या ऐसा कोई त्रिभुज संभव है जिसमें

(i) दो कोण समकोण हों?

(ii) दो कोण न्यून कोण हों?

(iii) दो कोण अधिक कोण हों?

(iv) प्रत्येक कोण 60° से कम हो?

(v) प्रत्येक कोण 45° से बड़ा हो?

(vi) प्रत्येक कोण 60° के बराबर हो?

(vii) प्रत्येक कोण 60° से बड़ा हो?

16. निम्न में से प्रत्येक में तीन धनात्मक संख्याएँ दी गई हैं। लिखिए क्या ये संख्याएँ किसी त्रिभुज की भुजाओं (सेमी में) सम्भावित लम्बाइयाँ हो सकती हैं:

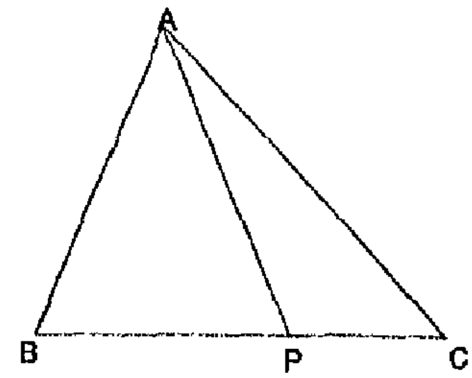
(i) 2, 3, 4	(ii) 4, 5, 3	(iii) 11, 12, 13
(iv) 9, 6, 25	(v) 2, 7, 9	(vi) 27, 25, 19

17. ΔABC में भुजा BC पर स्थित P एक बिन्दु है (आकृति 12.18)। निम्न में से प्रत्येक कथन में रिक्त स्थान को संकेत '=', '<' या '>' से इस प्रकार भरिए कि कथन सत्य हो जाए:

(i) AP ——— AB + BP

(ii) AP ——— AC + PC

(iii) AP ——— $\frac{1}{2}$ (AB + AC + BC)



आकृति 12.18

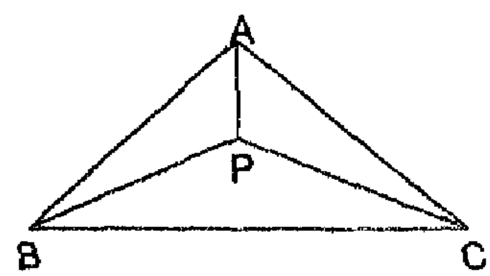
18. ΔABC के अभ्यंतर में P एक बिन्दु है (आकृति 12.19)। लिखिए कौन से कथन सत्य (T) हैं तथा कौन से असत्य (F):

(i) AP + PB < AB

(ii) AP + PC < AC

(iii) BP + PC = BC

(iv) AP + PC > AC



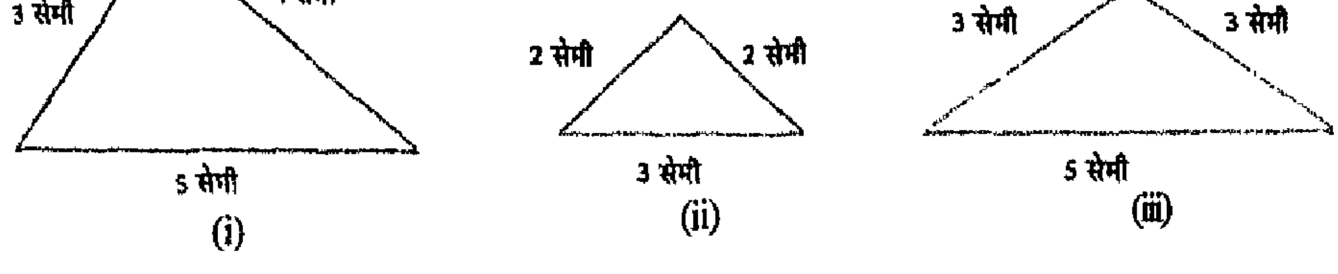
आकृति 12.19

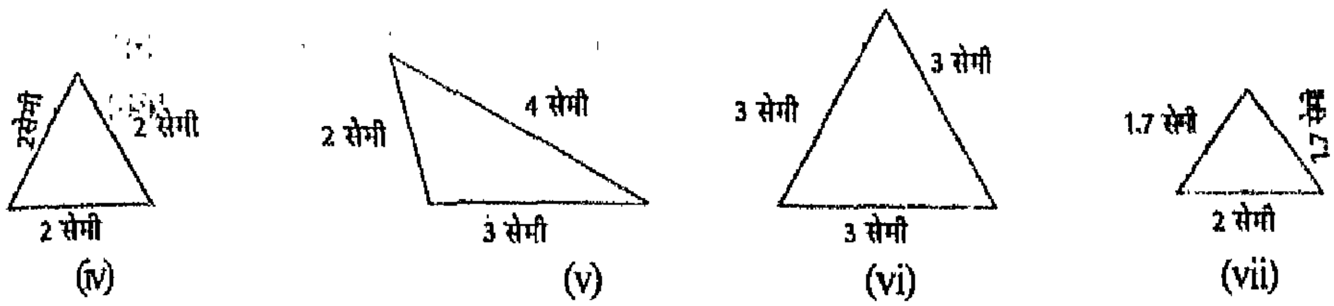
12.5 त्रिभुजों के प्रकार

I. भुजाओं के अनुसार त्रिभुजों का वर्गीकरण

अब हम त्रिभुजों की भुजाओं की लम्बाइयों के अनुसार त्रिभुजों के प्रकारों का अध्ययन करेंगे।

आइए आकृतियों 12.20 (i) – (vii) का अवलोकन करें :

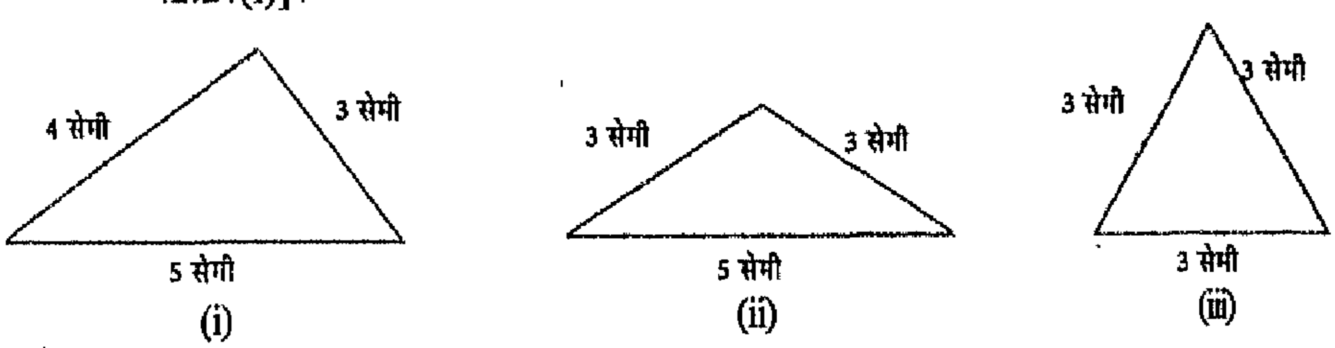




आकृति 12.20

भुजाओं की लम्बाइयों के आपसी संबंधों के आधार पर यदि हम इन त्रिभुजों का वर्गीकरण करें, तो त्रिभुज (i) व (v) एक वर्ग में, त्रिभुज (ii), (iii) व (vii) दूसरे वर्ग में तथा त्रिभुज (iv) व (vi) तीसरे वर्ग में आएँगे। पहले वर्ग में सम्मिलित त्रिभुजों में तीनों भुजाएँ असमान हैं। दूसरे वर्ग के त्रिभुजों में दो भुजाएँ बराबर हैं तथा तीसरे वर्ग के त्रिभुजों में तीनों भुजाएँ बराबर हैं। इस प्रकार भुजाओं की लम्बाइयों के आधार पर त्रिभुजों का निम्न प्रकार वर्गीकरण करते हैं:

(i) एक त्रिभुज जिसकी कोई भी दो भुजाएँ बराबर न हों ***विषमबाहु त्रिभुज*** *(scalene triangle)* कहलाता है। उदाहरण के लिए यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ 3 सेमी, 4 सेमी व 5 सेमी हैं, तो वह विषमबाहु त्रिभुज है [आकृति 12.21(i)]।



आकृति 12.21

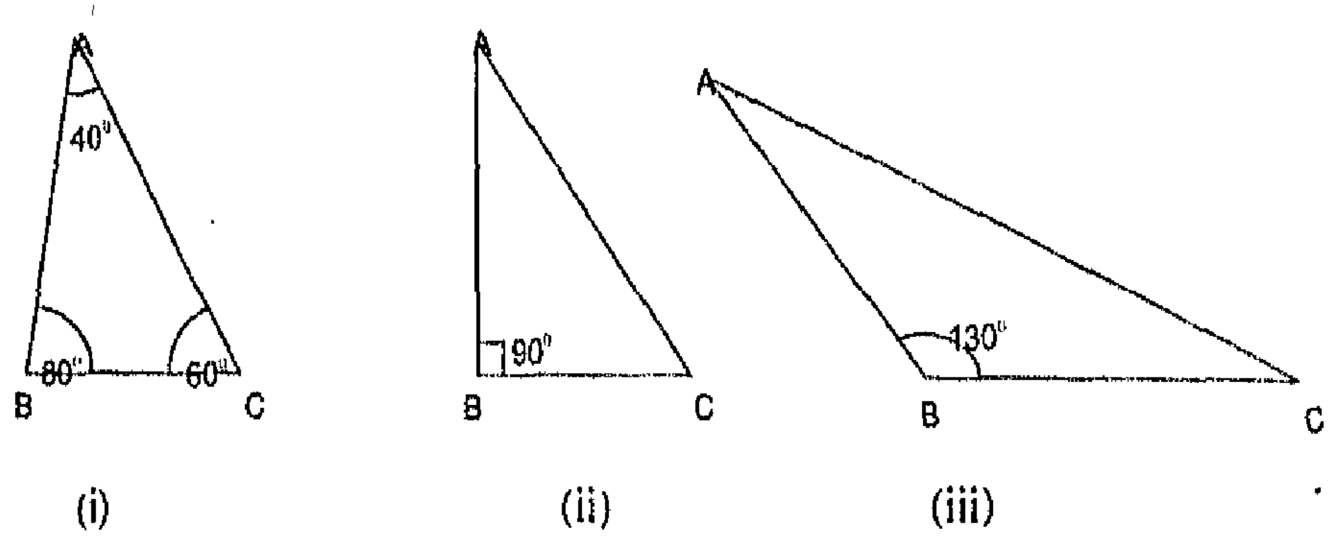
(ii) एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर होती हैं ***समद्विबाहु त्रिभुज*** *(isosceles triangle)* कहलाता है। उदाहरण के लिए 3 सेमी, 3 सेमी व 5 सेमी भुजाओं वाला त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है [आकृति 12.21(ii)]।

(iii) एक त्रिभुज जिसमें सभी भुजाएँ बराबर होती हैं ***समबाहु त्रिभुज*** *(equilateral triangle)* कहलाता है। अतः 3 सेमी, 3 सेमी व 3 सेमी भुजाओं वाला त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है [आकृति 12.21(iii)]।

II. कोणों के अनुसार त्रिभुजों का वर्गीकरण

कोणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण निम्न प्रकार कर सकते हैं :

(i) एक त्रिभुज जिसके सभी कोण न्यून कोण होते हैं ***न्यून कोण त्रिभुज*** *(acute triangle)* कहलाता है [आकृति 12.22(i)]।



आकृति 12.22

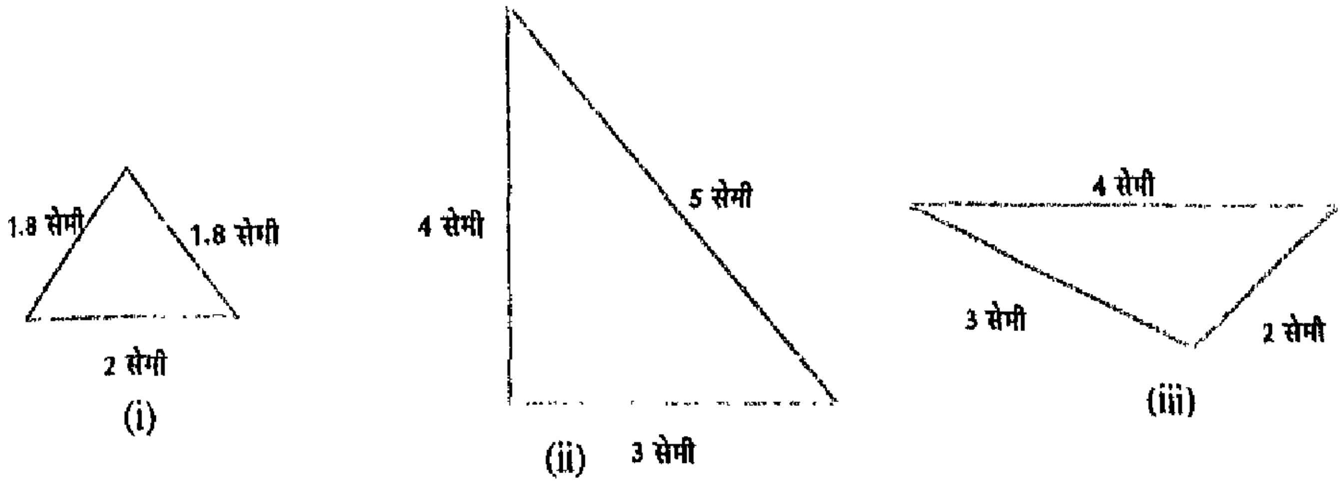
(ii) एक त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण होता है ***समकोण त्रिभुज*** *(right triangle)* कहलाता है। आकृति 12.22 (ii) में ΔABC समकोण त्रिभुज है क्योंकि $\angle B$ एक समकोण है। समकोण की सम्मुख भुजा CA ***कर्ण*** *(hypotenuse)* कहलाती है।

(iii) एक त्रिभुज जिसका एक कोण अधिक कोण होता है ***अधिक कोण त्रिभुज*** *(obtuse triangle)* कहलाता है। आकृति 12.22 (iii) में $\angle B$ अधिक कोण है। अतः ΔABC अधिक कोण त्रिभुज है।

●●●

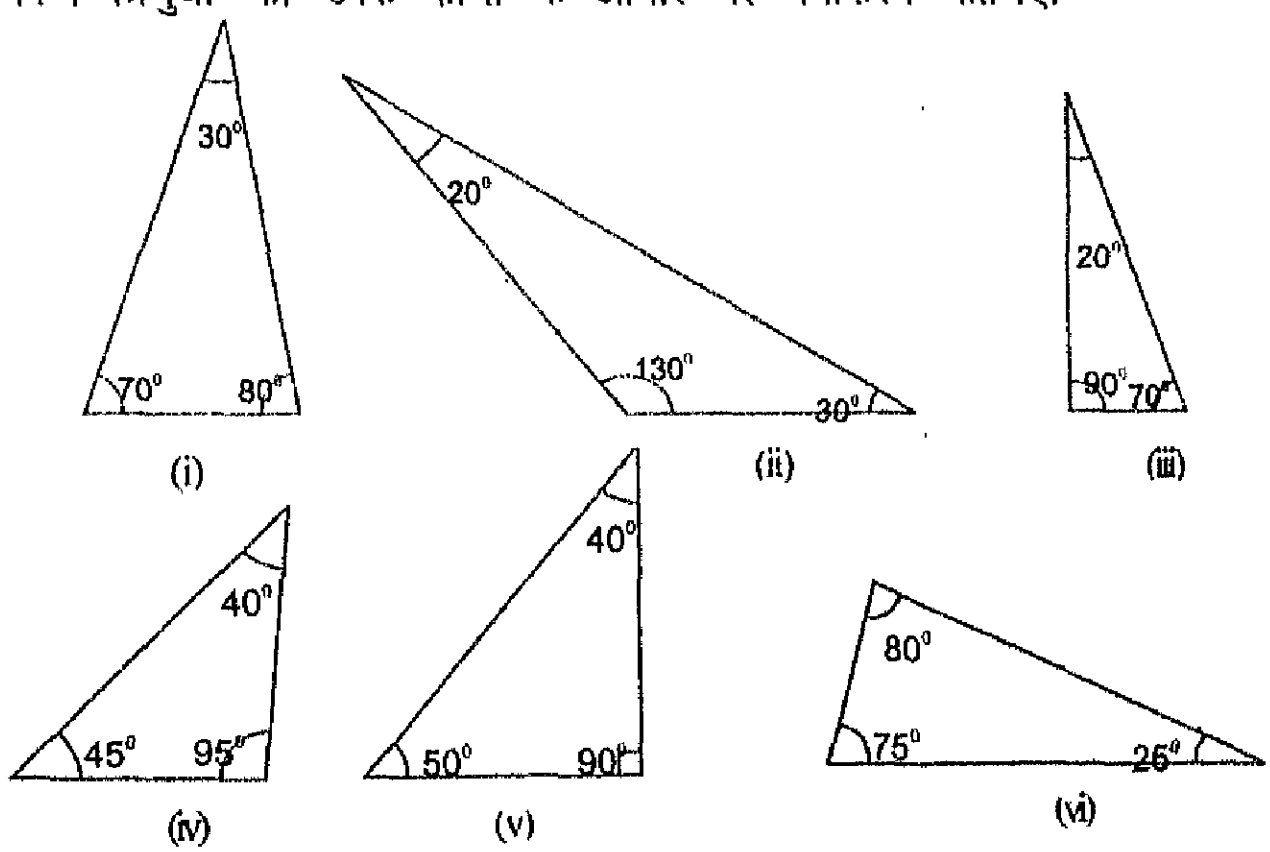
प्रश्नावली 12.3

1. आकृति 12.23 में पाँच त्रिभुज हैं। भुजाओं की सेंमी. में लम्बाइयाँ भुजाओं के अनुदिश लिखी हुई हैं। प्रत्येक के बारे में लिखिए कि क्या वह विषमबाहु, समद्विबाहु या समबाहु त्रिभुज है।



आकृति 12.23

2. निम्न त्रिभुजों का उनके कोणों के आधार पर वर्गीकरण कीजिए:



आकृति 12.24

3. त्रिभुजों का विषमबाहु, समद्विबाहु या समबाहु के रूप में वर्गीकरण कीजिए, यदि

उनकी भुजाएँ हैं:

(i) 2 सेमी, 3 सेमी, 2 सेमी (ii) 2 सेमी, 2 सेमी, 2 सेमी

(iii) 3 सेमी, 6 सेमी, 4 सेमी (iv) 7 सेमी, 12 सेमी, 13 सेमी

(v) 5 सेमी, 5 सेमी, 5 सेमी (vi) 4 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी

4. त्रिभुजों का कोणों के आधार पर वर्गीकरण कीजिए, यदि उनके कोण हैं :

(i) $50^\circ, 40^\circ, 90^\circ$ (ii) $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ (iii) $70^\circ, 60^\circ, 50^\circ$

(iv) $150^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ (v) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ (vi) $80^\circ, 40^\circ, 60^\circ$

याद रखने योग्य बातें

1. त्रिभुज वह आकृति है जो तीन असंरेख बिन्दुओं में से दो-दो को जोड़ने वाले (तीन) रेखाखंडों से प्राप्त होती है। त्रिभुज को निरूपित करने के लिए संकेत Δ का प्रयोग किया जाता है।
2. त्रिभुज में तीन भुजाएँ, तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं।
3. तीन भुजाएँ एवं तीन कोण त्रिभुज के छः अवयव कहलाते हैं।
4. एक त्रिभुज तल को तीन भागों में विभाजित करता है – अभ्यंतर, बहिर्भाग एवं त्रिभुज स्वयं।
5. त्रिभुज ABC अपने अभ्यंतर के साथ मिलकर त्रिभुजाकार क्षेत्र ABC कहलाता है।
6. त्रिभुज के कोणों का योग दो समकोण या 180° होता है।
7. किसी भी त्रिभुज का कोई भी बाह्य कोण अपने अभिमुख अंतः कोणों के योग के बराबर होता है।
8. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग उसकी तीसरी भुजा से अधिक होता है।
9. जिस त्रिभुज की कोई भी दो भुजाएँ बराबर न हों, उसे *विषमबाहु त्रिभुज* कहते हैं।
10. जिस त्रिभुज में दो भुजाएँ बराबर हों, उसे *समद्विबाहु त्रिभुज* कहते हैं।
11. जिस त्रिभुज की सभी भुजाएँ बराबर हों, उसे *समबाहु त्रिभुज* कहते हैं।
12. जिस त्रिभुज के सभी कोण न्यून कोण हों, उसे *न्यून कोण* त्रिभुज कहते हैं।
13. जिस त्रिभुज में एक कोण समकोण हो, उसे *समकोण त्रिभुज* कहते हैं।
14. जिस त्रिभुज में एक कोण अधिक कोण हो, उसे *अधिक कोण त्रिभुज* कहते हैं।

रचनाएँ

अध्याय 13

13.1 भूमिका

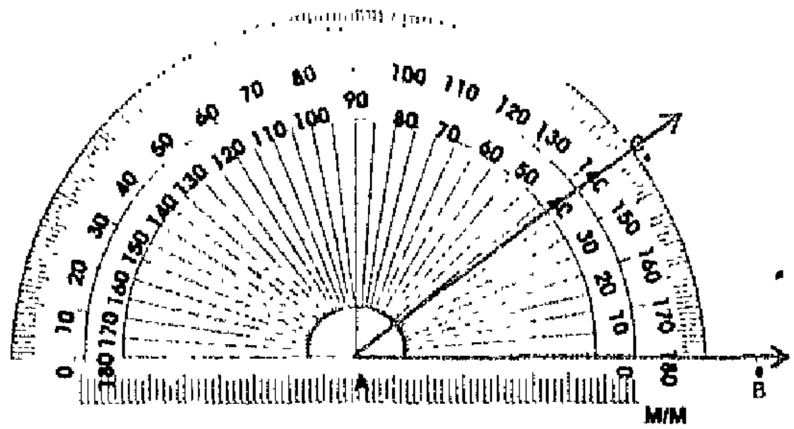
ज्यमिति में 'रचना' शब्द दी हुई मापों के आधार पर शुद्ध व सही आकृति बनाने के लिए प्रयोग किया जाता है। जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में कभी न कभी ऐसे व्यवहारिक ज्ञान की आवश्यकता पड़ जाती है। विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी की व्यवहारिक शिक्षा में तो यह ज्ञान अत्यंत आवश्यक है। इस अध्याय में, हम पटरी, सेट-स्क्वेयर, चाँदे तथा परकार की सहायता से कुछ आकृतियों की रचना करने का ज्ञान प्राप्त करेंगे।

13.2 चाँदे द्वारा कोणों की रचना

चाँदा आपके ज्यामिति बक्स में रखा एक यंत्र है जो दिए हुए कोण को मापने के लिए प्रयोग किया जाता है। यह दिए हुए माप का कोण बनाने में भी प्रयोग किया जाता है। आप 5°, 10°, 15°, ... आदि माप वाले कोणों की रचना करना पिछली कक्षाओं में पहले ही सीख चुके हैं। अब हम 67°, 53°, 120°,... आदि जैसे सभी प्रकार के कोणों को खींचना सीखेंगे। एक दिए हुए परिमाण (मान लीजिए 38°) के कोण की रचना हम निम्न प्रकार करेंगे:

रचना के चरण :

1. एक किरण AB खींचिए (आकृति 13.1)।
2. चाँदे को AB पर इस प्रकार रखिए कि उसका केन्द्र किरण AB के प्रारंभिक बिन्दु A पर पड़े और 0-180 रेखा AB के अनुदिश रहे। चाँदे का गोलाई वाला भाग रेखा AB के ऊपर की ओर रहना चाहिए।
3. AB पर 0 से प्रारम्भ कर चाँदे पर 38° के चिह्न के सामने कागज पर एक बिन्दु C अंकित कीजिए।
4. चाँदे को हटाकर किरण AC खींचिए।



आकृति 13.1

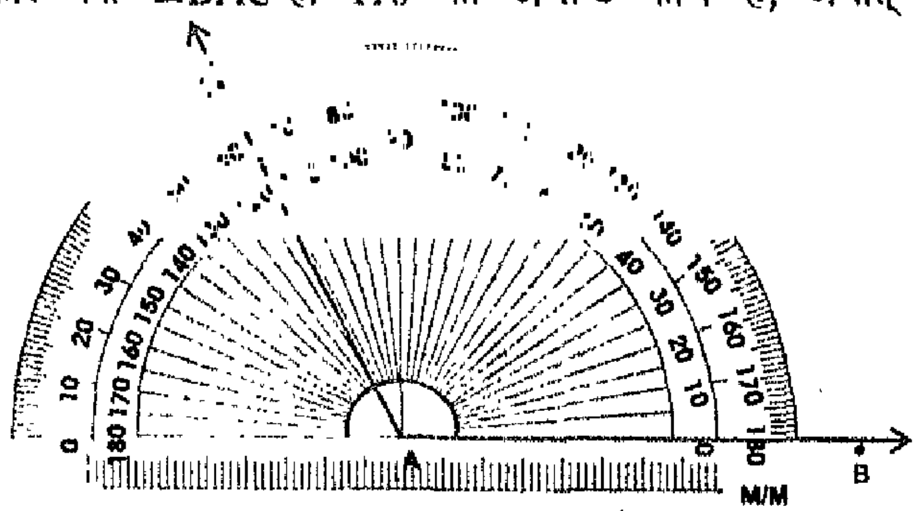
इस प्रकार बना ∠BAC ही 38° का अभीष्ट कोण है, अर्थात् ∠BAC = 38° है।

38° का कोण एक न्यून कोण है। आइए अब 116° माप का एक अधिक कोण बनाएँ।

रचना के चरण :

1. एक किरण AB खींचिए (आकृति 13.2)।
2. AB पर चाँदे को इस प्रकार रखिए कि उसका केन्द्र किरण AB के प्रारंभिक बिन्दु A पर पड़े तथा 0-180 रेखा AB के अनुदिश रहे।
3. चाँदे पर शून्य से प्रारंभ कर 116° वाले चिह्न के सामने कागज पर बिन्दु C अंकित कीजिए।
4. चाँदे को हटा कर किरण AC खींचिए।

इस प्रकार बना ∠BAC ही 116° का अभीष्ट कोण है, अर्थात् ∠BAC = 116° है।



आकृति 13.2

●●●

प्रश्नावली 13.1

1. निम्नलिखित समय पर घड़ी की सुइयों द्वारा निर्मित छोटे कोणों की माप ज्ञात कीजिए और चाँदे द्वारा इन कोणों की रचना कीजिए:

   (a) 3 बजे (b) 1 बजे (c) 8 बजे

2. चाँदे का प्रयोग कर निम्न कोणों की रचना कीजिए:

   45°, 67°, 110°, 179°, 92°

3. चाँदे की सहायता से एक समकोण ABC खींचिए । इसके अभ्यंतर में एक बिन्दु D अंकित कीजिए। किरण BD खींचिए और मापन द्वारा जाँच कीजिए कि $\angle ABD$ तथा $\angle DBC$ पूरक कोण हैं।

4. आकृति 13.3(i) व (ii) में दिखाए अनुसार दो किरणें AB व CD खींचिए। चाँदे का प्रयोग कर AB व CD को एक भुजा मानते हुए क्रमशः 15° व 138° के कोणों की रचना कीजिए।



आकृति 13.3

13.3 पटरी और सेट-स्क्वेयर द्वारा रचनाएँ

हम अब कुछ रचनाएँ पटरी एवं सेट-स्क्वेयर द्वारा करना सीखेंगे।

I. एक दी हुई रेखा पर लम्ब रेखा खींचना

याद कीजिए कि दो रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब कहलाती हैं, यदि उनके द्वारा निर्मित कोण की माप 90° हो। संकेत '$\perp$' लम्ब रेखा दर्शाने के लिए प्रयोग किया जाता है। हम एक दी हुई रेखा पर एक निर्धारित बिन्दु से होकर जाने वाली लम्ब रेखा खींचेंगे। इसके लिए दो स्थितियाँ हैं :

(i) जब निर्धारित बिन्दु दी गई रेखा पर स्थित है।

(ii) जब निर्धारित बिन्दु दी गई रेखा पर स्थित नहीं है।

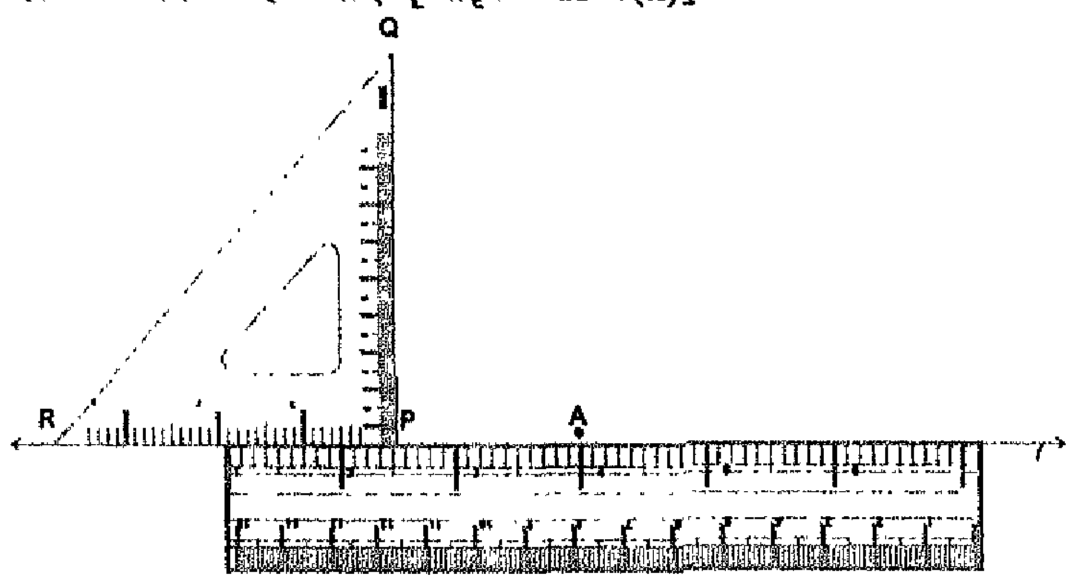
(i) दी हुई रेखा पर स्थित एक बिन्दु से उस रेखा पर लम्ब खींचना

दिया है : एक रेखा *l* तथा उस पर स्थित एक बिन्दु A

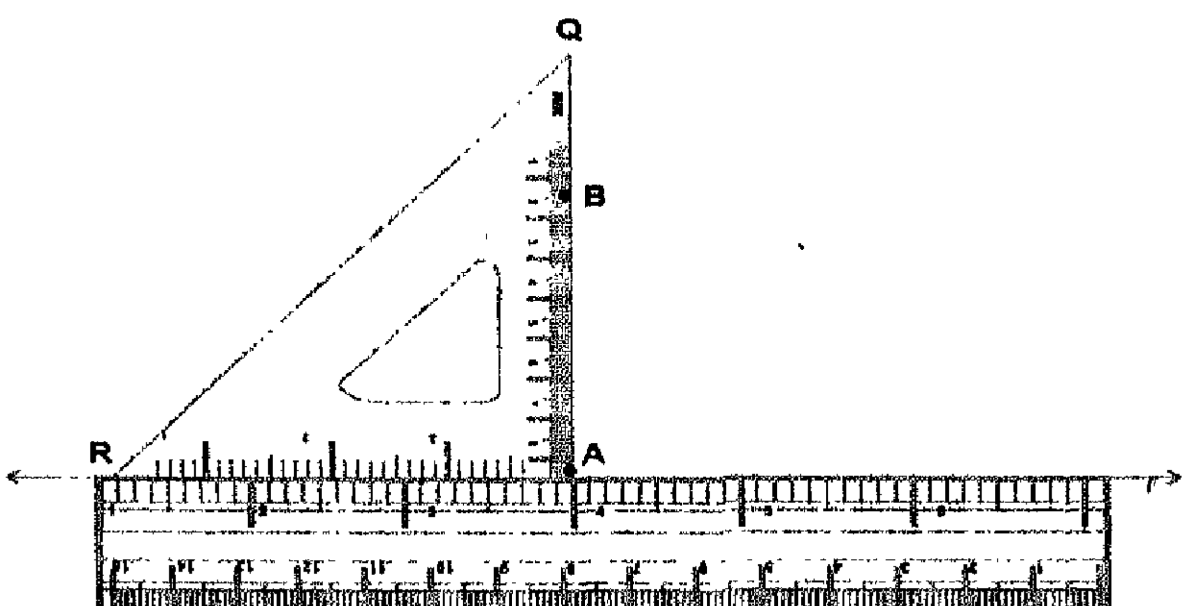
रचना करनी है: एक रेखा की जो *l* पर लम्ब है तथा A से होकर जाती है।

रचना के चरण:

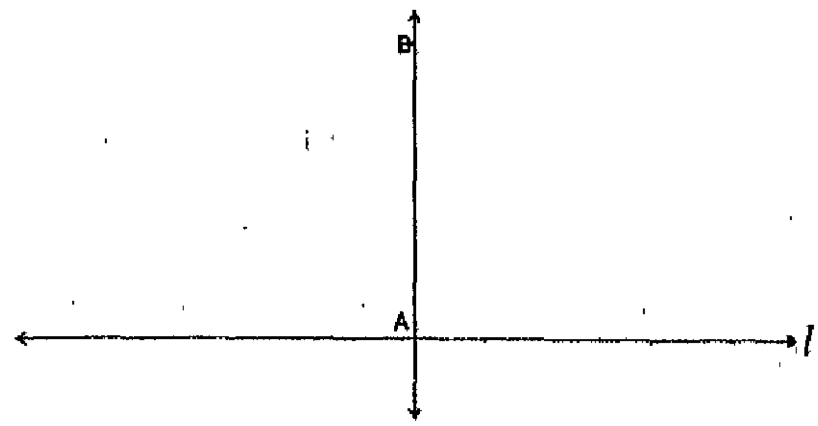
1. पटरी को रेखा *l* पर इस प्रकार रखिए कि उसका एक लम्बा किनारा रेखा के अनुदिश रहे [आकृति 13.4(i)]।
2. पटरी को स्थिर रखते हुए, सेट-स्क्वेयर PQR को इस प्रकार रखिए कि इसके समकोण P की एक भुजा पटरी के संपर्क में रहे।
3. सेट-स्क्वेयर को पटरी के किनारे के अनुदिश इस प्रकार सरकाइए कि बिन्दु P, बिन्दु A के संपाती हो जाए [आकृति 13.4(ii)]।



(i)



(ii) आकृति 13.4



(iii)

आकृति 13.4

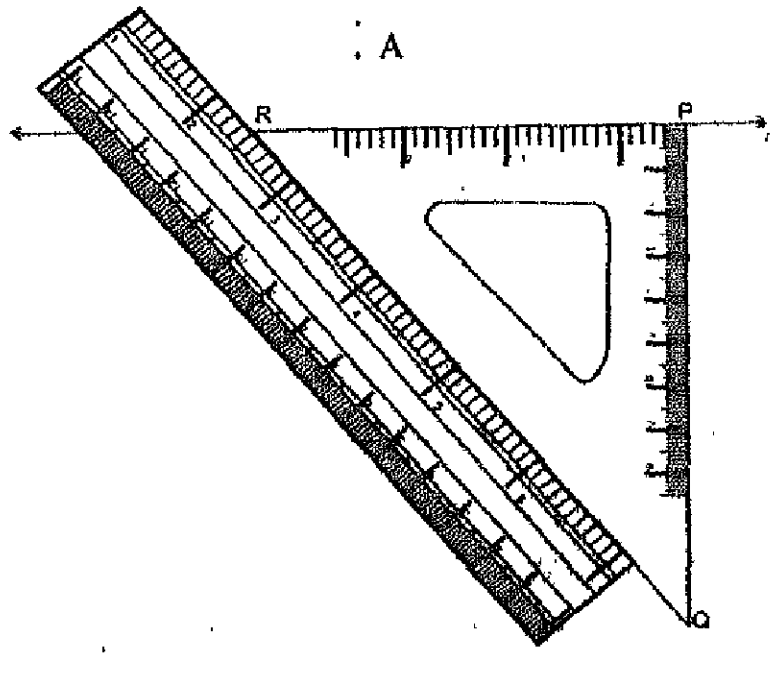
4. इस स्थिति में, सेट-स्क्वेयर को स्थिर रखते हुए, नुकीली पेंसिल द्वारा उसके किनारे PQ के अनुदिश रेखा AB खींचिए।

रेखा AB ही रेखा *l* पर अभीष्ट लम्ब रेखा है [आकृति 13.4 (iii)]।

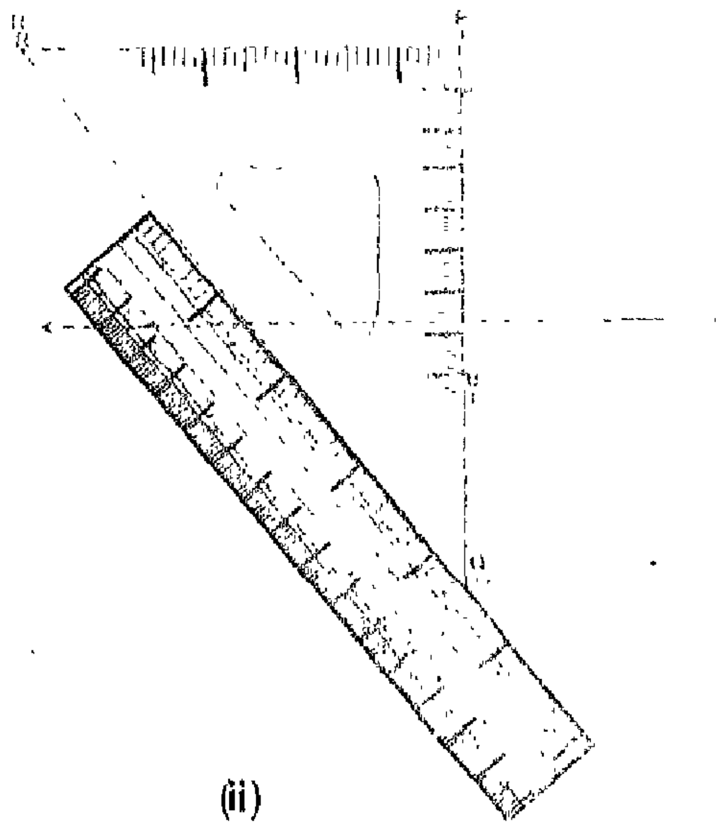
(ii) दी हुई रेखा पर स्थित न होने वाले बिन्दु से इस रेखा पर लम्ब खींचना

दिया है : एक रेखा *l* तथा एक बिन्दु A जो *l* पर स्थित नहीं है।

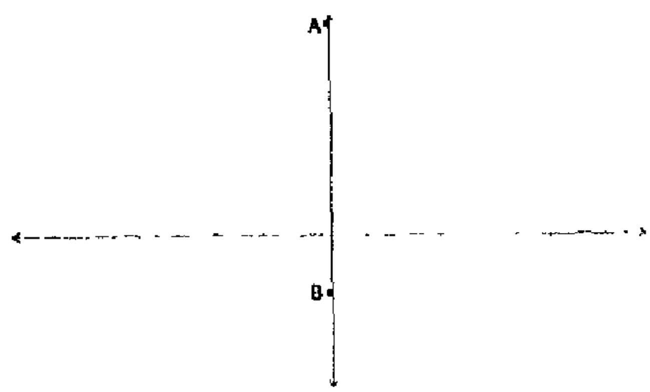
रचना करनी है : एक रेखा की जो *l* पर लम्ब है तथा A से होकर जाती है।



(*i*) आकृति 13.5



(ii)



(iii)

आकृति 13.5

रचना के चरण:

1. किसी एक सेट-स्क्वेयर को इस प्रकार रखिए कि उसके समकोण P का एक किनारा PR रेखा *l* के अनुदिश रहे [आकृति 13.5(i)]।
2. अब सेट-स्क्वेयर को स्थिर रखते हुए, एक पटरी समकोण के सम्मुख किनारे के अनुदिश रखिए।
3. पटरी को स्थिर रखते हुए, सेट-स्क्वेयर को पटरी के अनुदिश इस प्रकार सरकाइए कि उसका दूसरा किनारा PQ दिए हुए बिन्दु A से होकर जाए [आकृति 13.5(ii)]।

4. सेट-स्क्वेयर के किनारे PQ के अनुदिश रेखा AB खींचिए।

इस प्रकार प्राप्त रेखा AB ही अभीष्ट रेखा है जो l पर लम्ब है तथा उस पर न स्थित बिन्दु A से होकर जाती है [आकृति 13.5(iii)]।

II. *एक दी हुई रेखा के समांतर रेखा खींचना*

दी हुई किसी रेखा के समान्तर रेखा खींचने के लिए, हम निम्न दो स्थितियों पर विचार करते हैं:

(i) समांतर रेखा एक दिए हुए बिन्दु स होकर जाती है जो रेखा पर स्थित नहीं है।

(ii) समांतर रेखा दी हुई रेखा से एक निश्चित दूरी पर स्थित है।

(i) एक दी हुई रेखा के समांतर और इस रेखा पर न स्थित एक दिए हुए बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा की रचना करना

दिया है: एक रेखा m तथा एक बिन्दु A जो m पर स्थित नहीं है।

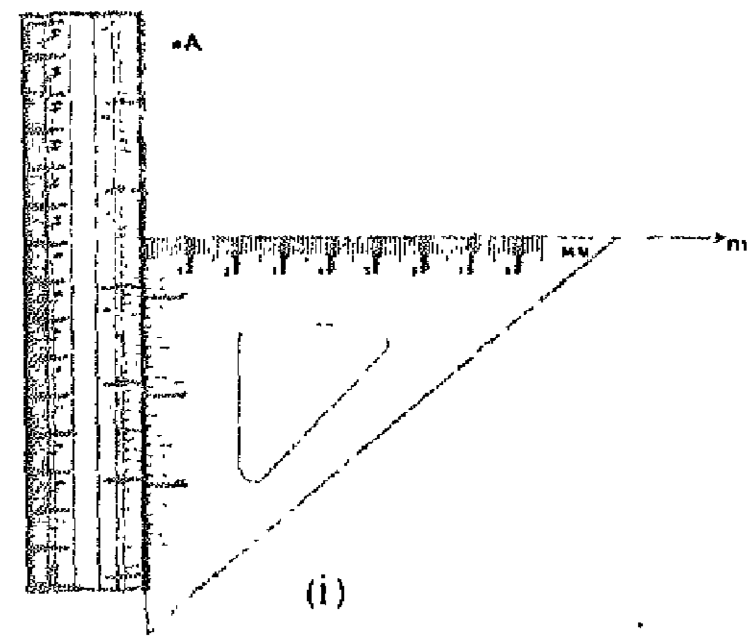
रचना करनी है: एक रेखा की जो m के समान्तर है और बिन्दु A से होकर जाती है।

रचना के चरण:

1. एक सेट-स्क्वेयर को रेखा m पर इस प्रकार रखिए कि उसके समकोण की एक भुजा (किनारा) m के अनुदिश रहे [आकृति 13.6(i)]।
2. सेट-स्क्वेयर को स्थिर रखते हुए, एक पटरी को समकोण की दूसरी भुजा के अनुदिश रखिए।
3. पटरी को स्थिर रखते हुए, सेट-स्क्वेयर को पटरी के अनुदिश इस प्रकार सरकाइए कि समकोण की पहली भुजा बिन्दु A से होकर जाए।
4. सेट-स्क्वेयर को इस स्थिति में स्थिर रखते हुए, समकोण की पहली भुजा के अनुदिश रेखा l (AB) खींचिए [आकृति 13.6(ii)]।

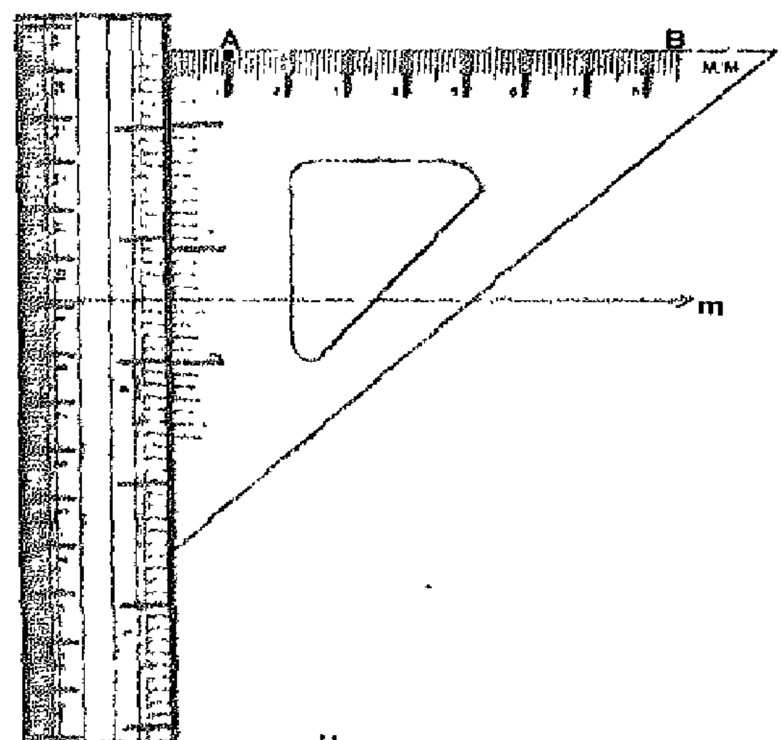
इस प्रकार प्राप्त रेखा l ही अभीष्ट रेखा है [आकृति 13.6(iii)]।

(ii) *एक दी हुई रेखा के समांतर व इससे एक दी गई दूरी पर रेखा की रचना करना।*



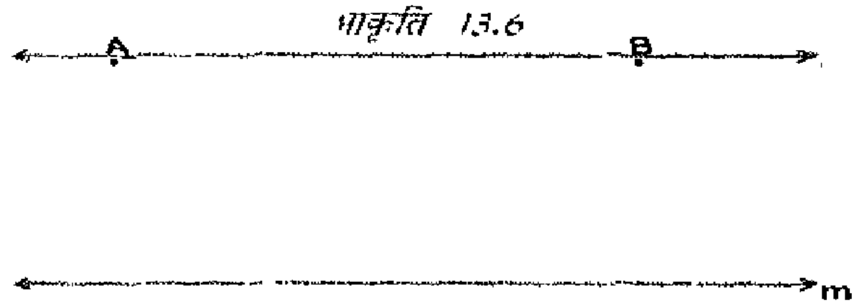
(i)

आकृति 13.6



(ii)

आकृति 13.6



(iii)

आकृति 13.6

दिया है: एक रेखा l तथा एक दूरी (माना 4 सेंमी.)

रचना करनी है : एक रेखा की जो रेखा l के समांतर है तथा उससे 4 सेंमीं. की दूरी पर स्थित है।

रचना के चरण:

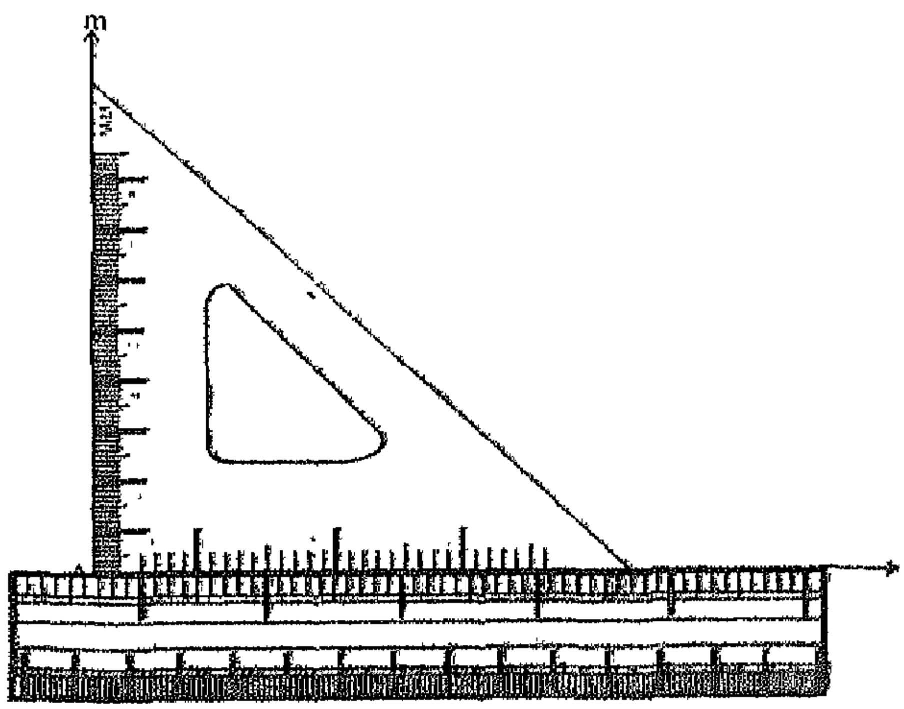
1. रेखा l के अनुदिश एक पटरी रखिए तथा l पर एक बिन्दु A अंकित कीजिए।

2. एक सेट-स्क्वेयर के समकोण के एक किनारे (भुजा) को l के अनुदिश रखते हुए, सेट-स्क्वेयर को पटरी के साथ रखिए। सेट-स्क्वेयर को पटरी के अनुदिश इस प्रकार सरकाइए कि समकोण की दूसरी भुजा बिन्दु A से होकर जाए। इस भुजा के अनुदिश एक रेखा m खींचिए। यह रेखा m बिन्दु A से होकर जाती है तथा l पर लम्ब है [आकृति 13.7(i)]।

3. पटरी की सहायता से m पर एक बिन्दु B इस प्रकार अंकित कीजिए कि AB = 4 सेमी हो।

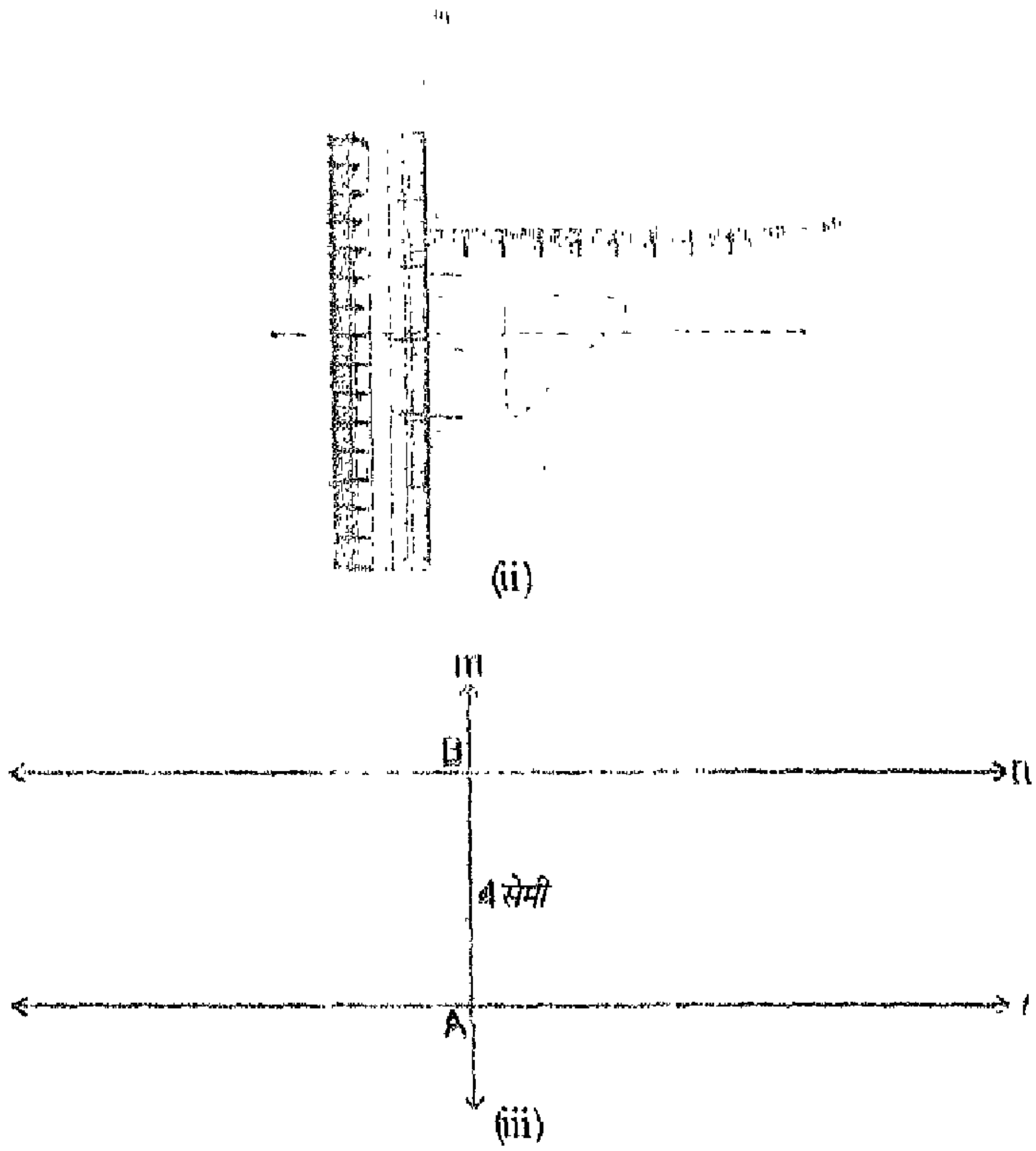
4. अब चरण 2 का अनुगमन करते हुए, रेखा m पर लम्ब तथा B से होकर जाने वाली रेखा n की रचना कीजिए [आकृति 13.7(ii)]।

   इस प्रकार प्राप्त रेखा n ही अभीष्ट रेखा है जो l के समांतर है तथा इससे 4 सेमी की दूरी पर स्थित है [आकृति 13.7(iii)]।



(i)

आकृति 13.7



आकृति 13.7

प्रश्नावली 13.2

1. एक रेखा AB खींचिए और उस पर एक बिन्दु C अंकित कीजिए। सेट-स्क्वेयर की सहायता से उस पर एक लम्ब CD खींचिए । चाँदे की सहायता से जाँच कीजिए कि $\angle ACD = 90^\circ$ है।

2. एक रेखा DE खींचिए और इस रेखा पर न स्थित एक बिन्दु A अंकित कीजिए। सेट-स्क्वेयर के प्रयोग द्वारा बिन्दु A से इस रेखा DE पर एक लम्ब की रचना कीजिए।

3. एक रेखा AB खींचिए और इसके दोनों ओर दो बिन्दु C व E अंकित कीजिए।

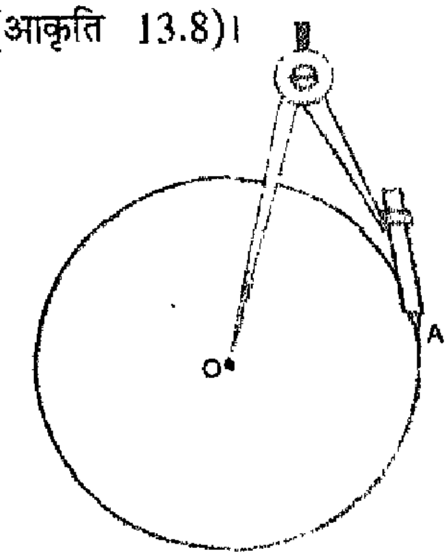
सेट-स्क्वेयर द्वारा C से होकर जाने वाली तथा AB के समांतर रेखा CD और E से होकर जाने वाली तथा AB के समांतर रेखा EF खींचिए।

4. एक रेखा AB खींचिए तथा इस पर दो बिन्दु C व D अंकित कीजिए। सेट-स्क्वेयर के प्रयोग द्वारा C पर रेखा CP $\perp$ AB तथा D पर रेखा DQ $\perp$ AB खींचिए। क्या आप कह सकते हैं कि रेखाएँ CP व DQ समान्तर हैं?
5. सेट-स्क्वेयर की सहायता से एक दी हुई रेखा AB के समान्तर तथा इससे 3 सेमी की दूरी पर स्थित एक रेखा CD खींचिए। इस प्रकार की आप कितनी रेखाएँ खींच सकते हैं?

13.4 वृत्त

आइए हम वृत्त के बारे में कुछ मूलभूत अवधारणाओं को समझने का यत्न करें, जिन्हें हम अपनी अगली रचनाओं में प्रयोग करेंगे। हम अपने चारों ओर जिन ज्यामितीय आकृतियों को देखते हैं, वृत्त उनमें सर्वाधिक परिचित एवं आकर्षक आकृति है। सार्वजनिक भवनों, प्राकृतिक दृश्यावली, उपवन आदि में इस आकृति का अत्याधिक प्रयोग होता है। अनेकों घरेलू उपकरणों, खिलौनों, यातायात के साधनों (वाहनों), घड़ी आदि आधुनिक यंत्रों के मूल में यही आकर्षक आकृति हैं। यहाँ हम वृत्त के कुछ अत्याधिक प्रयोगों की जानकारी प्राप्त करेंगे।

आप जानते हैं कि परकार का प्रयोग कर किस प्रकार एक वृत्त खींचा जाता है। अपनी अभ्यास पुस्तिका के पन्ने पर एक बिन्दु O अंकित कीजिए। अब परकार का धातु वाला सिरा इस बिन्दु O पर स्थिर रखकर पेंसिल वाले सिरे को चारों ओर तब तक घुमाइए जब तक कि पेंसिल की नोक अपने आरंभ के बिंदु, मान लीजिए, A पर वापस न आ जाए (आकृति 13.8)।

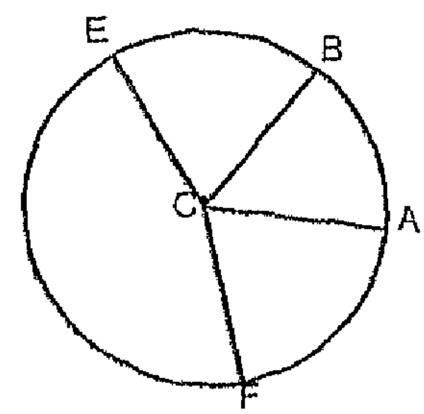


आकृति 13.8

इस प्रकार प्राप्त आकृति को **वृत्त** *(circle)* कहते हैं। आकृति 13.8 में हम देखते हैं कि स्थिर बिन्दु O तथा परकार की पेंसिल की नोक के बीच की दूरी सदा वही (अचर) रहती है। इस प्रकार *वृत्त तल में बनी वह बंद आकृति है जो तल के उन सभी बिन्दुओं से मिल कर बनी है जो तल में स्थित एक स्थिर बिन्दु से अचर दूरी पर हैं।* यह स्थिर बिन्दु वृत्त का **केन्द्र** *(centre)* तथा अचर दूरी वृत्त की **त्रिज्या** *(radius)* कहलाती है। आकृति 13.8 में O वृत्त का केन्द्र तथा लम्बाई OA वृत्त की त्रिज्या है।

13.4.1 वृत्त की त्रिज्याएँ

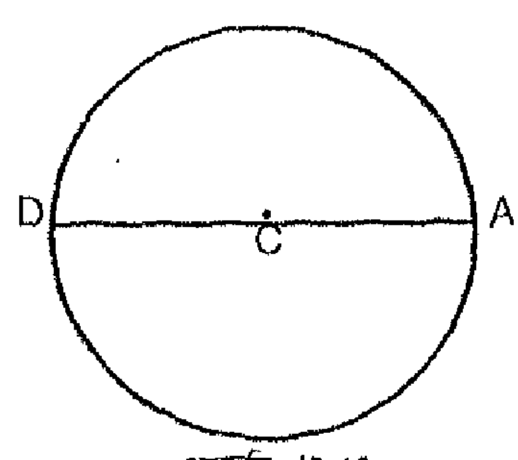
त्रिज्या शब्द न केवल एक दूरी के लिए प्रयोग किया जाता है बल्कि केन्द्र को वृत्त के किसी भी बिन्दु से मिलाने वाले रेखाखंड के लिए भी त्रिज्या शब्द ही प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार यदि A, B, E, F आदि केन्द्र C वाले वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं तो CA, CB, CE, CF, आदि सभी रेखाखंड वृत्त की त्रिज्याएँ हैं। इस प्रकार हम एक वृत्त की असंख्य त्रिज्याएँ खींच सकते हैं। यदि हम इन त्रिज्याओं की लम्बाइयाँ ज्ञात करें, तो हम पाएँगे कि सभी की लम्बाई समान है। इस प्रकार CE = CF = CA = CB = r सेंमी. (मान लीजिए) है। दूसरे शब्दों में, ***वृत्त की सभी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।***



आकृति 13.9

13.4.2 व्यास

आकृति 13.10 में हम त्रिज्या AC को बढ़ाते हुए वृत्त के बिन्दु D तक ले जाते हैं। रेखाखंड AD को वृत्त का *व्यास (diameter)* कहते हैं। इस प्रकार, *कोई भी रेखाखंड AD जो वृत्त के केन्द्र C से होकर जाता है तथा जिसके अन्त बिन्दु A व D वृत्त पर स्थित हों वृत्त का व्यास कहलाता है।* CA व AD को मापिए। हम पाते हैं कि AD = 2CA है, अर्थात् ***वृत्त के व्यास की लम्बाई उसकी त्रिज्या की दुगुनी होती है।*** एक वृत्त में हम कितने व्यास खींच

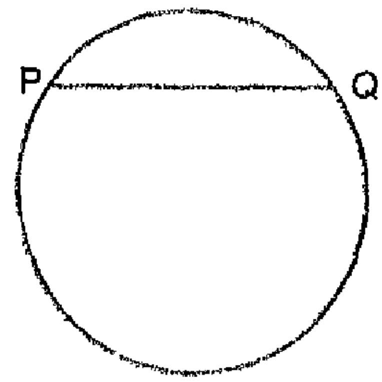


आकृति 13.10

सकते हैं? हम जितने चाहें उतने व्यास खींच सकते हैं। इस स्थिति को यह कह कर व्यक्त किया जाता है कि एक वृत्त के असंख्य व्यास होते हैं।

13.4.3 जीवा

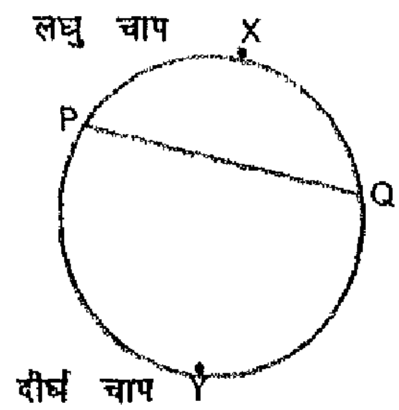
वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं P व Q को जोड़ने वाला रेखाखंड वृत्त की ***जीवा*** *(chord)* कहलाता है (आकृति 13.11)। क्या हम कह सकते हैं कि वृत्त का व्यास भी एक जीवा है? हाँ। वस्तुतः केन्द्र से होकर जाने वाली जीवा ही वृत्त का व्यास होती है और सबसे बड़ी लम्बाई की जीवा होती है।



आकृति 13.11

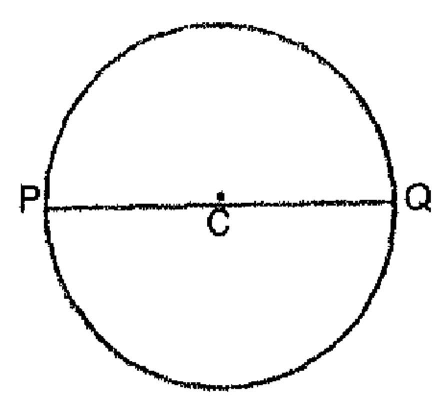
13.4.4 चाप

यदि हम वृत्त पर दो बिन्दु P व Q लें, तो ये बिन्दु वृत्त को दो भागों में विभाजित करते हैं। सामान्यतः ये दो भाग बराबर नहीं होते (आकृति 13.12)। छोटा भाग ***लघु चाप*** *(minorarc)* कहलाता है तथा बड़े भाग को ***दीर्घ चाप*** *(majorarc)* कहते हैं। आकृति 13.12 में बिन्दु P व Q दोनों चापों में उभयनिष्ठ हैं। अतः दोनों चापों में भेद करने के लिए, हम इन दोनों चापों पर एक-एक बिन्दु और अंकित करते हैं।



आकृति 13.12

इस प्रकार आकृति 13.12 में लघु चाप को संकेत PXQ से दर्शाते हैं तथा दीर्घ चाप को PYQ से दर्शाते हैं। हम इन्हें क्रमशः लघु चाप PQ व दीर्घ चाप PQ भी लिखते हैं। जिस अवस्था में P व Q वृत्त को दो बराबर भागों में बाँटते हैं, अर्थात् जब दोनों चाप बराबर होते हैं, तो प्रत्येक चाप को एक *अर्धवृत्त (semicircle)* कहते हैं (आकृति 13.13)।

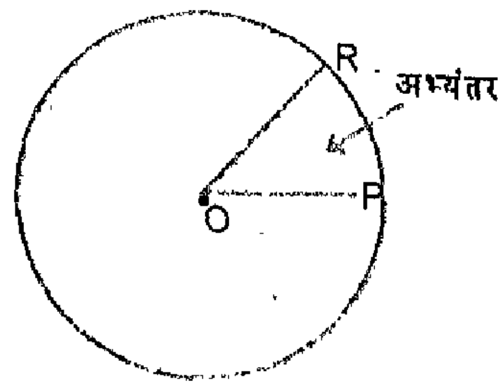


आकृति 13.13

13.4.5 वृत्त का अभ्यंतर तथा बहिर्भाग

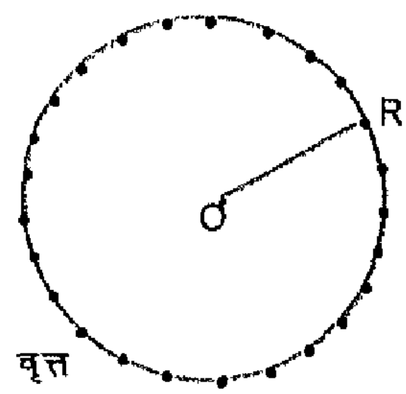
एक वृत्त पर विचार कीजिए जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या r सेंमी. है। वृत्त तल को तीन भागों में विभाजित करता है :

(i) तल का वह भाग जिसमें P जैसे सभी बिन्दु हैं जो वृत्त से घिरे हुए हैं। यह भाग *वृत्त का अभ्यंतर* *(interior of the circle)* (आकृति 13.14) कहलाता है। ध्यान दीजिए कि वृत्त के अभ्यंतर में स्थित प्रत्येक बिन्दु P के लिए $OP < r$ सेमी है।



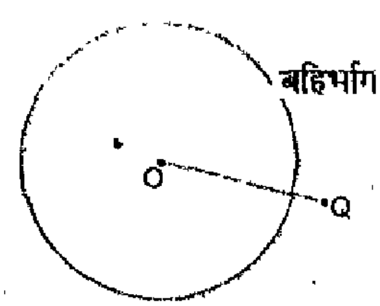
आकृति 13.14

(ii) तल का वह भाग जिसमें R जैसे सभी बिन्दु हैं जो वृत्त पर स्थित हैं (आकृति 13.15)। ध्यान दीजिए कि वृत्त पर स्थित सभी बिन्दुओं R के लिए $OR = r$ सेमी है।



आकृति 13.15

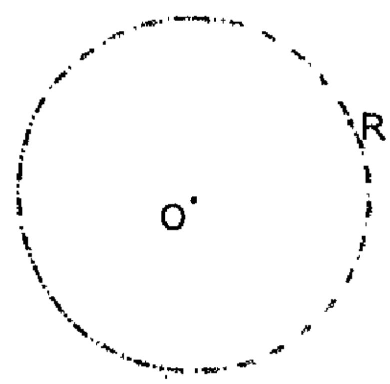
(iii) तल का वह भाग जिसमें Q जैसे सभी बिन्दु स्थित हैं जो वृत्त से घिरे हुए नहीं हैं (आकृति 13.16)। यह भाग वृत्त का ***बहिर्भाग*** कहलाता है। आकृति में छायांकित भाग वृत्त का बहिर्भाग है। ध्यान दीजिए कि बहिर्भाग में स्थित प्रत्येक बिन्दु Q के लिए $OQ > r$ सेमी है।



आकृति 13.16

13.4.6 वृत्तीय क्षेत्र

वृत्त तथा वृत्त के अभ्यंतर को मिला कर बनने वाले क्षेत्र को ***वृत्तीय क्षेत्र*** *(circular region)* कहते हैं। आकृति 13.17 में वृत्त सहित छायांकित भाग केन्द्र O वाले वृत्त का वृत्तीय क्षेत्र दर्शाता है। ध्यान दीजिए कि वृत्तीय क्षेत्र में स्थित प्रत्येक बिन्दु P के लिए $OP \leqslant r$ सेमी है।



वृत्तीय क्षेत्र

आकृति 13.17

प्रश्नावली 13.3

1. O एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र C हो तथा त्रिज्या 2 सेमी हो।
2. एक ही केन्द्र C तथा 4 सेमी व 2.5 सेंमी त्रिज्याओं वाले दो वृत्त खींचिए।

   [**टिप्पणी:** एक ही केन्द्र वाले ***वृत्त संकेन्द्रीय वृत्त*** *(concentric circles)* कहलाते हैं।]
3. तीन वृत्त खींचिए जिनके केन्द्र एक ही हों, परन्तु त्रिज्याएँ भिन्न हों।
4. किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसके दो व्यास AC और BD खींचिए जो एक दूसरे पर लम्ब हों। रेखाखंडों AB, BC, CD व DA को मिलाइए। आकृति ABCD किस प्रकार की आकृती है?
5. 3 सेमी त्रिज्या व केन्द्र C वाला एक वृत्त खींचिए। इसके सापेक्ष तीन बिन्दु P, Q व R इस प्रकार अंकित कीजिए कि (i) P वृत्त पर स्थित हो, (ii) Q वृत्त के अभ्यंतर में स्थित हो तथा (iii) R वृत्त के बहिर्भाग में स्थित हो।
6. एक वृत्त का व्यास 12 सेमी है। इसकी त्रिज्या क्या होगी?
7. एक वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है। इसका व्यास क्या होगा ?
8. केन्द्र O वाला (त्रिज्या कुछ भी हो) एक वृत्त खींचिए। इसके अभ्यंतर में दो बिन्दु P_1 व P_2 अंकित कीजिए तथा रेखाखंड P_1P_2 खींचिए। क्या रेखाखंड P_1P_2 पर स्थित सभी बिन्दु वृत्त के अभ्यंतर में स्थित हैं ?

9. किसी त्रिज्या व केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इसके वृत्तीय क्षेत्र को छायांकित कीजिए।

10. निम्न कथनों को सत्य बनाने के लिए, रिक्त स्थानों में उचित पूर्ति कीजिए:

(a) वृत्त की जीवा वह रेखाखंड है जिसके अन्त बिन्दु --------।

(b) वृत्त की त्रिज्या वह रेखाखंड है जिसका एक अन्त बिन्दु ------ और दूसरा अन्त बिन्दु-------।

(c) व्यास वृत्त की वह जीवा है जो केन्द्र ----------।

(d) वृत्त की जीवा के अन्त बिन्दु वृत्त को दो भागों में विभाजित करते हैं जहाँ प्रत्येक भाग वृत्त का ------- कहलाता है।

11. केन्द्र O व 5 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचिए। वृत्त की एक जीवा AB खींचिए। वृत्त के लघु चाप व दीर्घ चाप दर्शाइए।

12. दो संकेन्द्रीय वृत्त बनाइए जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 2 सेमी व 5 सेमी हैं। 2 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के बहिर्भाग में केन्द्र से 3 सेमी की दूरी पर एक बिन्दु P अंकित कीजिए। क्या बिन्दु P, 4 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के अभ्यंतर में स्थित है?

13.5 पटरी व परकार से रचनाएँ

अब हम केवल पटरी व परकार की सहायता से रेखाओं और कोणों से संबंधित कुछ रचनाएँ करेंगे।

I. एक रेखाखंड के लम्ब समद्विभाजक की रचना करना

दिया है : एक रेखाखंड MN।

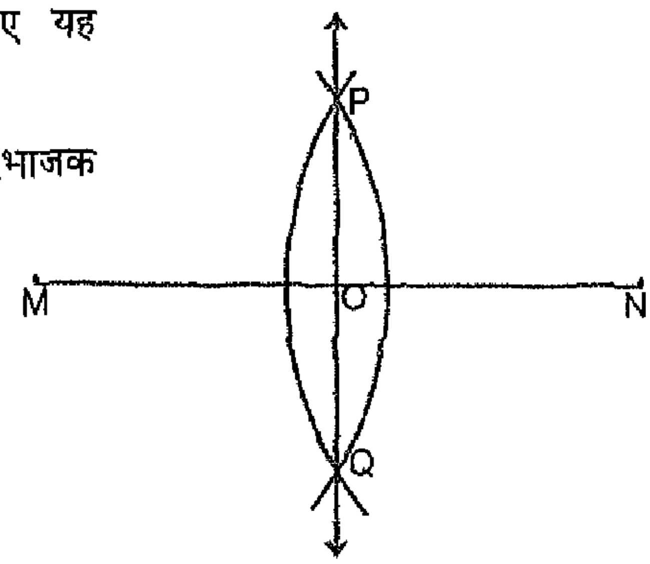
रचना करनी है: MN के लम्ब समद्विभाजक की।

रचना के चरण :

1. M को केन्द्र मान कर तथा MN की लम्बाई के आधे से अधिक की त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए।
2. N को केन्द्र मानते हुए, उसी त्रिज्या को लेकर एक अन्य चाप खींचिए जो पहले चाप को बिन्दुओं P व Q पर काटता है।

3. PQ को जोड़िए, मान लीजिए यह MN को O पर काटता है।

तब PQ ही रेखाखंड MN का लम्ब समद्विभाजक है (आकृति 13.18)।



आकृति 13.18

सत्यापन : $\angle NOQ$ को मापिए। आप देखेंगे कि यह कोण समकोण है। इसी प्रकार, मापने पर ज्ञात होता है कि MO = ON है।

अत: PQ, MN का लम्ब समद्विभाजक है।

क्या उपरोक्त विधि का, एक दिए हुए रेखाखंड को समद्विभाजित करने में प्रयोग किया जा सकता है। यदि हाँ, तो रचना के चरण लिखिए।

●●●

प्रश्नावली 13.4

1. 5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखंड खींचिए। इस रेखाखंड के लम्ब समद्विभाजक की रचना कीजिए।
2. 3 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र C हो। एक जीवा AB लीजिए। अब AB का लम्ब समद्विभाजक खींचिए। क्या यह वृत्त के केन्द्र C से होकर जाता है?
3. 2 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की रचना कीजिए। इस वृत्त का एक व्यास PQ लीजिए। अब रेखाखंड PQ का लम्ब समद्विभाजक खींचिए। क्या यह वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है?

4. किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त में दो जीवाएँ AB व CD इस प्रकार लीजिए कि वे समांतर न हों। अब AB व CD के लम्ब समद्विभाजक खींचिए। ये किस बिन्दु पर मिलते हैं?

5. एक रेखाखंड AB लीजिए तथा वह रेखाखंड खींचिए जिस की लम्बाई निम्न हो:

(i) $\frac{1}{4}$ AB (ii) $\frac{3}{4}$ AB

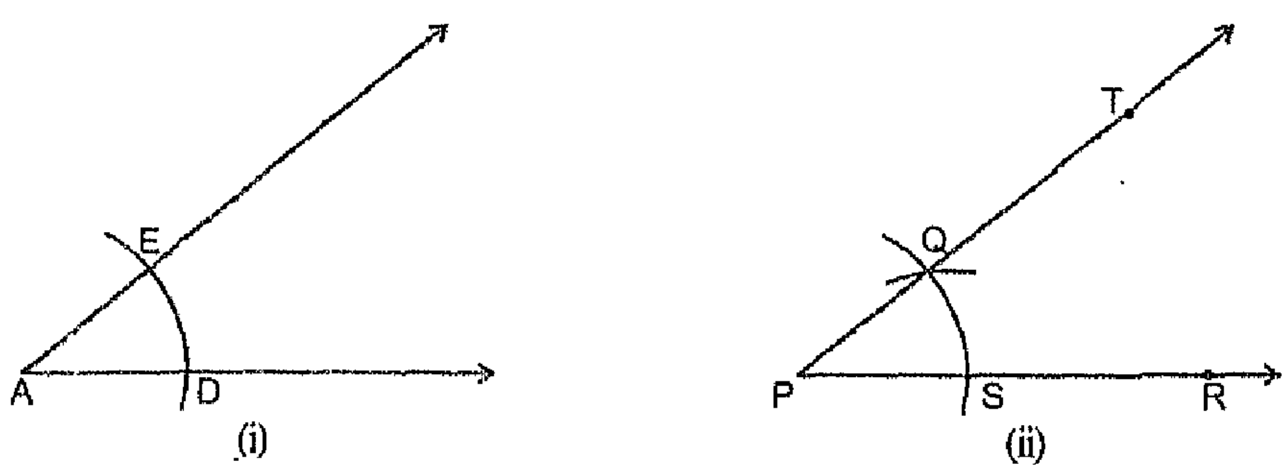
II: एक दिए हुए कोण के बराबर कोण की रचना करना

दिया है: एक कोण मान लीजिए ∠A [आकृति 13-19(i)]।

रचना करनी है : एक कोण की जो ∠A के बराबर हो।

रचना के चरण:

1. एक किरण PR खींचिए [आकृति 13.19(ii)]।
2. A को केन्द्र मान कर किसी उचित त्रिज्या का चाप खींचिए जो ∠A की भुजाओं को क्रमशः D व E पर काटता है [आकृति 13.19(i)]।
3. P को केन्द्र मान कर चरण 2 में ली गई त्रिज्या से एक चाप खींचिए जो किरण PR को बिन्दु S पर काटे।



आकृति 13.19

4. S को केन्द्र मान कर तथा DE के बराबर त्रिज्या लेकर, एक चाप खींचिए जो चरण 3 के चाप को Q पर काटे।
5. PQ को जोड़िए और बढ़ा कर किरण PT बनाइए।

इस प्रकार बना कोण $\angle TPR$ या $\angle P$ ही अभीष्ट कोण है।

सत्यापन: मापन द्वारा हम देखते हैं कि

$$\angle P = \angle A \text{ है।}$$

III: एक कोण का समद्विभाजन करना

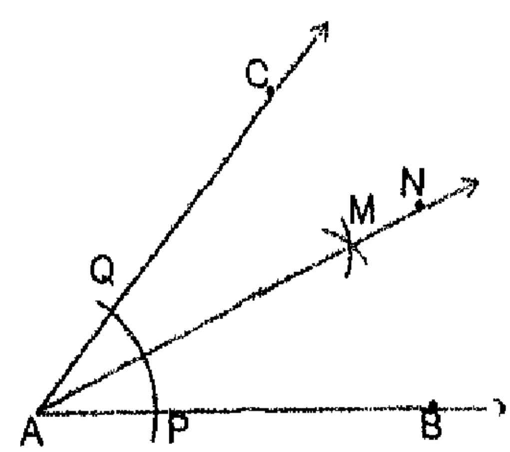
दिया है: एक कोण $\angle BAC$ ।

रचना करनी है: $\angle BAC$ के समद्विभाजक की।

रचना के चरण:

1. कोण के शीर्ष A को केन्द्र मान कर तथा एक उचित त्रिज्या लेकर, एक चाप खींचिए जो भुजा AB को P व भुजा AC को Q पर काटता है (आकृति 13.20)।
2. P को केन्द्र मान कर व $\frac{1}{2}$ PQ से अधिक की त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए।
3. Q को केन्द्र मान कर तथा चरण 2 वाली ही त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए, जो चरण 2 में खींचे गए चाप को बिन्दु M पर काटता है।
4. M को मिलाइए तथा बढ़ा कर किरण AN बनाइए।

तब किरण AN ही $\angle BAC$ का समद्विभाजक है (आकृति 13.20)।



आकृति 13.20

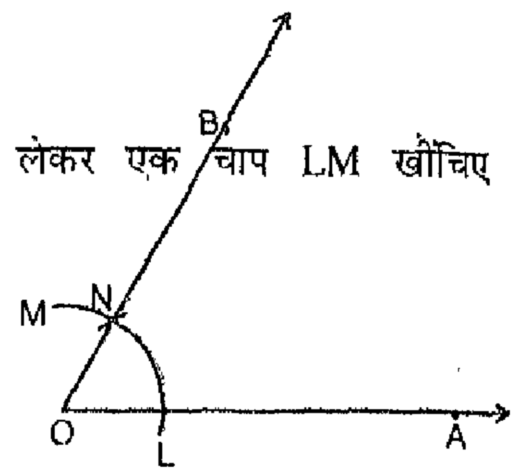
सत्यापन: मापन द्वारा हम देखते हैं कि

$$\angle BAN = \angle NAC$$

IV. 60° के कोण की रचना करना

रचना के चरण:

1. एक किरण OA खींचिए (आकृति 13.21)
2. O को केन्द्र मान कर व उचित त्रिज्या लेकर एक चाप LM खींचिए जो OA को L पर काटे।
3. L को केन्द्र मान कर तथा OL त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो LM को N पर काटे।
4. O व N को जोड़िए और किरण OB बनाइए।



आकृति 13.21

इस प्रकार बना कोण ∠AOB ही 60° का अभीष्ट कोण है।

सत्यापन : मापन द्वारा हम देखते हैं कि ∠AOB = 60° है।

V. 30° के कोण की रचना करना

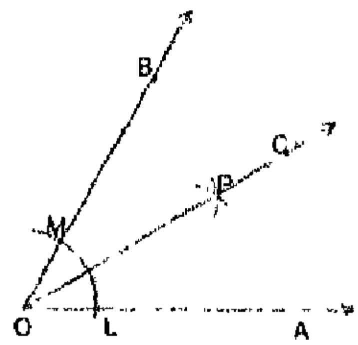
ध्यान दीजिए कि $30° = \frac{1}{2} 60°$ है। इस प्रकार, यदि हम पहले IV की तरह 60° का कोण बना लें तथा उपरोक्त रचना III की तरह इस कोण का समद्विभाजक खींच लें, तो हमें 30° का कोण प्राप्त हो जाएगा । इस प्रकार, 30° के कोण की रचना के लिए हम निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाते हैं।

रचना के चरण :

1. एक कोण AOB = 60° बनाइए।
2. O को केन्द्र मान कर तथा एक उचित त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो OA को L पर तथा OB को M पर काटे (आकृति 13.22)।
3. L को केन्द्र मान कर तथा $\frac{1}{2}$ LM से अधिक की त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए।
4. M को केन्द्र मान कर तथा चरण 3 में ली गई त्रिज्या से ही एक चाप खींचिए जो चरण 3 में खींचे गए चाप को P पर काटे।

5. O व P को जोड़ते हुए किरण OC खींचिए।

तब OC कोण AOB को समद्विभाजित करती है और इसलिए $\angle AOC = 30^\circ$ है।

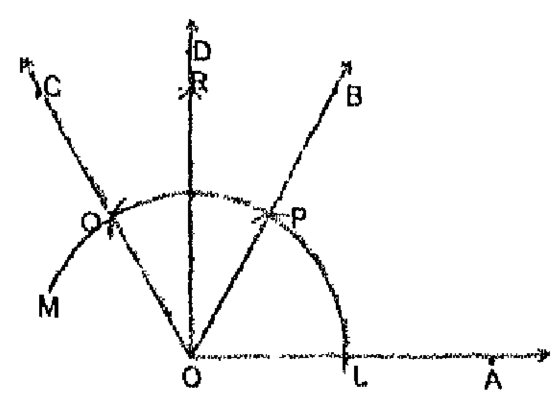


आकृति 13.22

VI. 90° माप वाले कोण की रचना करना

रचना के चरण:

1. एक किरण OA खींचिए।
2. O को केन्द्र मान कर तथा एक उचित त्रिज्या लेकर एक चाप LM खींचिए जो OA को L पर काटे (आकृति 13.23)।
3. अब L को केन्द्र तथा OL के बराबर त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो LM को P पर काटे।
4. P को केन्द्र मान कर तथा OL त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो चाप PM को Q पर काटे।



आकृति 13.23

5. O व P को मिलाते हुए किरण OB खींचिए और O व Q को मिलाते हुए किरण OC खींचिए। हम देखते हैं कि $\angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$ है।
6. रचना III की विधि से किरण OD खींचिए जो $\angle BOC$ का समद्विभाजक हो।

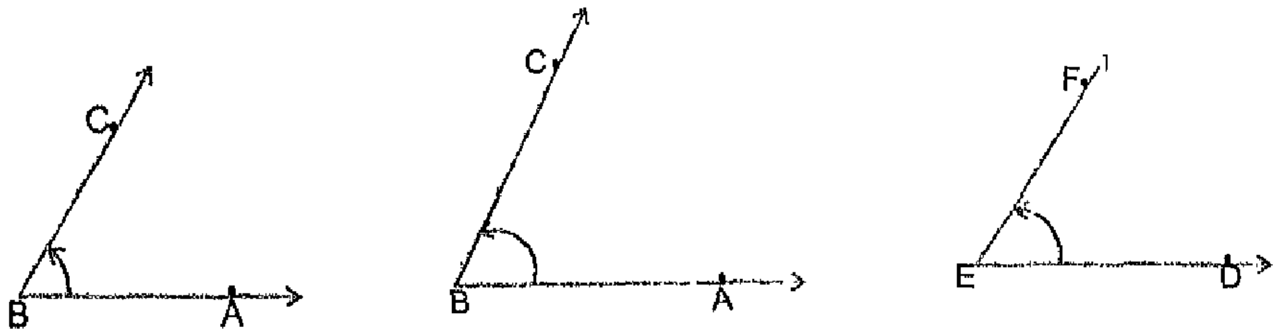
इस प्रकार बना $\angle AOD$ ही 90° का अभीष्ट कोण है।

ध्यान दीजिए कि 90° का कोण हम किसी ऋजु कोण का समद्विभाजन कर के भी प्राप्त कर सकते हैं। समद्विभाजक खींचने की विधि का प्रयोग कर हम $45^\circ = \frac{1}{2} \times 90^\circ$ का कोण भी खींच सकते हैं।

●●●

प्रश्नावली 13.5

1. आकृति 13.24 में बने ∠ABC के बराबर कोण की रचना कीजिए।

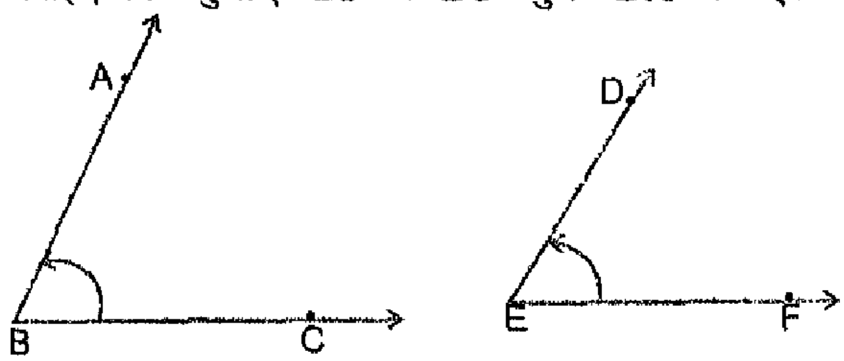


आकृति 13.24 *आकृति 13.25*

2. आकृति 13.25 में दो कोण ABC व DEF दिए है। एक कोण PBA खींचिए जो ∠DEF के बराबर हो तथा BP व BC भुजा BA के दो विपरीत पक्षों में हों।

[**टिप्पणी** : इस अवस्था में हम कहते हैं कि ∠PBC = ∠ABC + ∠DEF है, अर्थात् ∠PBC कोणों ABC व DEF का *योग* है।]

3. आकृति 13.26 में, ∠ABC > ∠DEF है। कोण ∠DEF के बराबर ∠PBA इस प्रकार बनाइए कि भुजाएँ BP व BC भुजा BA के एक ही पक्ष में रहें।



आकृति 13.26

[**टिप्पणी** : इस अवस्था में हम कहते हैं कि ∠PBC = ∠ABC - ∠DEF है, अर्थात् ∠PBC कोणों ABC और DEF का ***अंतर*** है।]

4. दो समान कोण खींचिए तथा उन्हें क्रमशः ∠P व ∠Q नाम दीजिए। अब ∠Q के बराबर एक कोण खींचिए तथा इसे ∠R नाम दीजिए। क्या ∠R व ∠P बराबर हैं?

5. एक कोण खींचिए और इसे ∠XYZ नाम दीजिए। अब एक कोण ∠ABC

की रचना इस प्रकार कीजिए कि $\angle ABC = 2 \angle XYZ$ हो।

6. एक कोण $\angle APB$ दिया है। क्या आप $\angle APQ$ की रचना कर सकतें हैं ताकि $\angle APQ = 3 \angle APB$ हो? यदि हाँ, तो $\angle APQ$ की रचना कीजिए।

7. एक कोण बनाइए तथा इसे $\angle BAC$ नाम दीजिए। अब एक किरण AX इस प्रकार खींचिए कि $\angle BAX = \angle XAC$ हो। मापन द्वारा इसकी सत्यता की जाँच कीजिए।

8. एक 30° का कोण बनाइए। इसे दो बराबर भागों में विभाजित कीजिए। इस प्रकार प्राप्त कोणों को मापिए।

9. कोणों का एक रैखिक युग्म बनाइए। दोनों कोणों के समद्विभाजक खींचिए। इस तथ्य की सत्यता की जाँच कीजिए कि दोनों समद्विभाजक एक दूसरे पर लम्ब हैं।

10. शीर्षाभिमुख कोणों का एक युग्म बनाइए। युग्म के प्रत्येक कोण का समद्विभाजक खींचिए। इस तथ्य की सत्यता की जाँच कीजिए कि दोनों समद्विभाजक एक ही रेखा में हैं।

11. पटरी और परकार की सहायता से 15°, 45°, 75°, 135° व 150° के कोणों की रचना कीजिए।

VII: एक दिए हुए बिन्दु से एक दी हुई रेखा पर लम्ब खींचना

यहाँ हम दो स्थितियों पर विचार करेंगे:

(i) बिन्दु दी हुई रेखा पर स्थित है।

(ii) बिन्दु दी हुई रेखा पर स्थित नहीं है।

(i) एक रेखा पर स्थित बिन्दु से रेखा पर लम्ब खींचना

दिया है : एक रेखा XY तथा इस पर स्थित एक बिन्दु P।

रचना करनी है ; P से होकर जाते हुए रेखा XY पर एक लम्ब की।

रचना के चरण:

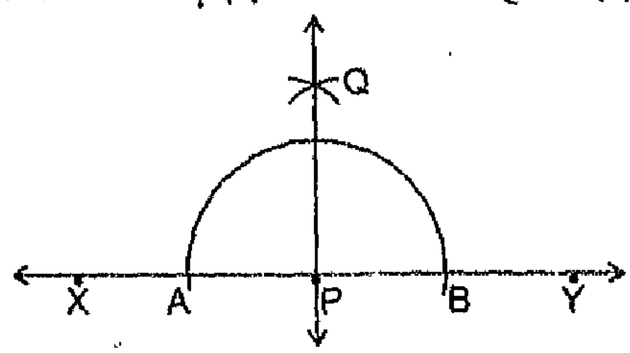
1. P को केन्द्र मान कर किसी भी त्रिज्या का एक चाप खींचिए जो XY को बिन्दु A व B पर काटता है (आकृति 13.27)।

2. A को केन्द्र मान कर तथा PA से बड़ी एक त्रिज्या लेकर एक चाप

खींचिए।

3. B को केन्द्र मान कर तथा चरण 2 में ली गई त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो चरण 2 में खींचे गए चाप को Q पर काटता है।

4. PQ को मिला कर बढ़ाइए और रेखा PQ बनाइए।



आकृति 13.27

इस प्रकार खींची गई रेखा PQ ही अभीष्ट लम्ब रेखा है।

सत्यापन : मापन द्वारा हम पाते हैं कि $\angle QPB = 90°$ है

(ii) एक रेखा पर उस बिन्दु से लम्ब खींचना जो इस रेखा पर स्थित नहीं है

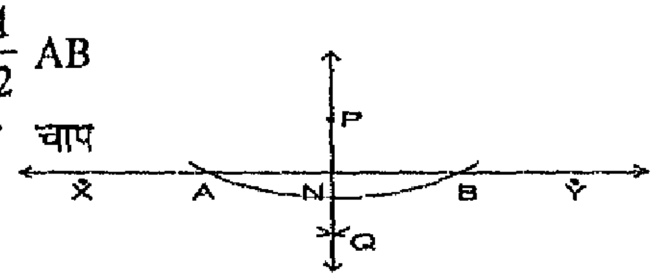
दिया है: एक रेखा XY तथा एक बिन्दु P जो रेखा पर स्थित नहीं है।

रचना करनी है: P से होकर जाती हुई एक रेखा की जो XY पर लम्ब है।

रचना के चरण:

1. P को केन्द्र मान कर तथा उचित त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो रेखा XY को A व B पर काटता है (आकृति 13.28)।

2. A को केन्द्र मान कर तथा $\frac{1}{2}$ AB से अधिक त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए।



आकृति 13.28

3. B को केन्द्र मान कर तथा चरण 2 में ली गई त्रिज्या ही लेकर एक चाप खींचिए जो चरण 2 में खींचे गए चाप को बिन्दु Q पर काटता है।

4. *PQ* को मिला कर एक रेखा *PQ* बनाइए जो *XY* को बिन्दु *N* पर काटे।

इस प्रकार बनी रेखा *PQ* ही अभीष्ट लम्ब रेखा है।

सत्यापन : मापन द्वारा हम देखते हैं कि $\angle PNB = 90°$ है।

VIII: समान्तर रेखाओं की रचना

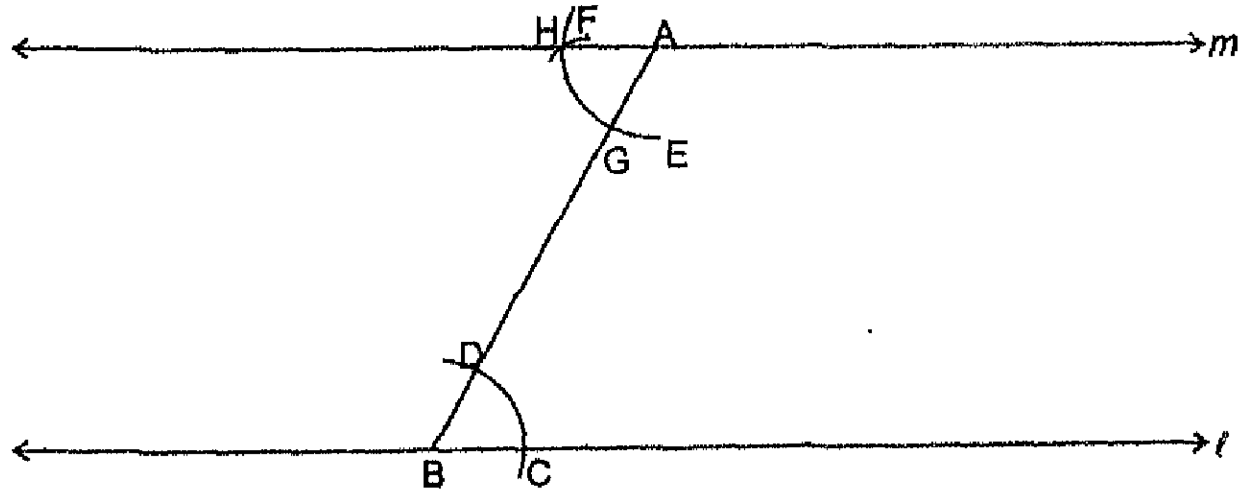
अब हम सीखेंगे कि एक रेखा के समांतर तथा इसके बाहर दिए हुए एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा की रचना किस प्रकार की जाती है।

दिया है: एक रेखा *l* तथा एक बिन्दु A जो *l* पर स्थित नहीं है।

रचना करनी है: *l* के समांतर तथा A से होकर जाने वाली एक रेखा की।

रचना के चरण:

1. एक बिन्दु B रेखा *l* पर अंकित करें तथा B को A से जोड़ें (आकृति 13.29)।
2. B को केन्द्र मान कर एक उचित त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो रेखा *l* को C पर तथा AB को D पर काटे।
3. अब A को केन्द्र मान कर तथा चरण 2 में ली गई त्रिज्या लेकर चाप EF खींचिए जो AB को G पर काटे।
4. परकार की धातु वाली नोक C पर रख कर परकार को इतना खोलें कि पेंसिल वाली नोक बिन्दु D पर आ जाए।



आकृति 13.29

5. अब G को केन्द्र मान कर तथा चरण 4 में ली गई त्रिज्या (CD) से एक चाप खींचिए जो चाप EF को H पर काटे।

6. अब AH को जोड़ते हुए रेखा m बनाइए।

इस प्रकार प्राप्त रेखा m ही अभीष्ट रेखा है, जो l के समांतर है तथा A से होकर जाती है।

●●●

प्रश्नावली 13.6

1. एक रेखा AB खींचिए तथा इस पर एक बिन्दु C अंकित कीजिए। पटरी व परकार द्वारा AB पर एक लम्ब रेखा CD खींचिए।
2. एक रेखा PQ खींचिए तथा इस रेखा पर न स्थित एक बिन्दु R अंकित कीजिए। पटरी व परकार की सहायता से रेखा PQ पर बिन्दु R से एक लम्ब खींचिए।
3. एक रेखा RS खींचिए तथा इस पर दो बिन्दु A व B अंकित कीजिए। पटरी व परकार द्वारा बिन्दुओं A व B से होकर जाने वाली दो रेखाएँ l व m खींचिए जो RS पर लम्ब हों। क्या रेखाएँ l व m समांतर रेखाएँ हैं?
4. एक रेखा AB खींचिए। इस पर न स्थित एक बिन्दु C लीजिए। पटरी व परकार का प्रयोग कर के C से होकर जाने वाली तथा AB के समांतर एक रेखा की रचना कीजिए।
5. कोई एक त्रिभुज ABC बनाइए तथा AB का मध्य-बिन्दु D अंकित कीजिए। पटरी व परकार के प्रयोग द्वारा D से होकर BC के समांतर एक रेखा खींचिए जो AC को E पर मिलती है। AE व EC को मापिए। क्या ये दोनों बराबर हैं?

●●●

याद रखने योग्य बातें

1. अनेक ज्यामितीय रचनाएँ पटरी, सेट-स्क्वेयर, चाँदे एवं परकार द्वारा संपन्न की जा सकती हैं।

2. वृत्त तल में स्थित वह आकृति है जो तल के उन सभी बिन्दुओं से बनी है जो एक स्थिर बिन्दु से एक अचर दूरी पर स्थित होते हैं। स्थिर बिन्दु को वृत्त का *केन्द्र* तथा अचर दूरी को वृत्त की ***त्रिज्या*** कहते हैं।

3. उस रेखाखंड को भी, जिसका एक अंत बिन्दु वृत्त के केन्द्र पर हो और दूसरा वृत्त पर, वृत्त की **त्रिज्या** कहते हैं। इस अर्थ में, एक वृत्त की असंख्य त्रिज्याएँ हो सकती हैं।

4. वृत्त की सभी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।

5. ऐसा रेखाखंड जो वृत्त के केन्द्र में से होकर जाए और जिसके अंत बिन्दु वृत्त पर स्थित हों, वृत्त का ***व्यास*** कहलाता है।

6. व्यास = $2\times$(त्रिज्या)

7. एक वृत्त तल को तीन भागों में विभाजित करता है: वृत्त का अभ्यंतर, वृत्त का बहिर्भाग एवं वृत्त स्वयं।

8. वृत्त के अभ्यंतर और वृत्त को मिलाकर *वृत्तीय क्षेत्र* कहते हैं।

9. O केन्द्र वाले वृत्त के अभ्यंतर में स्थित प्रत्येक बिन्दु P के लिए OP< वृत्त की त्रिज्या r, बहिर्भाग में स्थित प्रत्येक बिन्दु Q के लिए $OQ > r$ तथा वृत्त पर स्थित प्रत्येक बिन्दु R के लिए $OR = r$ होता है।

10. जिस रेखाखंड के अंत बिन्दु वृत्त पर स्थित हों उसे वृत्त की ***जीवा*** कहते हैं।

11. व्यास वृत्त की सबसे लम्बी जीवा होती है।

12. वृत्त के दो बिन्दु उसे दो भागों में बाँट देते हैं। इनमें से प्रत्येक भाग को एक ***चाप*** कहते हैं। सामान्यत: एक भाग दूसरे से बड़ा होता है। बड़े भाग को ***दीर्घ चाप*** तथा छोटे भाग को ***लघु चाप*** कहते हैं। यदि दोनों भाग बराबर हों, तो प्रत्येक भाग को एक ***अर्धवृत्त*** कहते हैं।

13. एक ही केन्द्र वाले वृत्तों को ***संकेन्द्रीय वृत्त*** कहते हैं।

अतीत के झरोखे से

'ज्यामिति' अर्थात् 'जिओमिटरी' (Geometry) ग्रीक भाषा के दो शब्दों 'Geo' जिसका अर्थ है 'भूमि' और 'Metron' जिसका अर्थ है 'मापन' से मिल कर बना है। इस प्रकार मूल रूप में ज्यामिति का अर्थ भूमि को मापने से है। प्राचीन मिस्र के लोगों को नील नदी में आने वाली वार्षिक बाढ़ के कारण अपनी भूमि का लेखा-जोखा रखना कठिन हो जाता था। भूमि का ठीक-ठीक लेखा-जोखा रखने की यह आवश्यकता ही ज्यामिति के अध्ययन का मूल कारण बनी। आरंभ में ज्यामिति का अध्ययन त्रिभुज, चतुर्भुज जैसी रेखीय आकृतियों का क्षेत्रफल निकालने तक ही सीमित था। प्राचीन बैबिलोनिया में भी लोग इस प्रकार का अध्ययन करते थे तथा आकृतियों का क्षेत्रफल निकालने के लिए कुछ सूत्रों का प्रयोग करते थे। इस प्रकार के कुछ सूत्र ईसा से लगभग 1650 वर्ष पूर्व लिखे बैबिलोनिया के एक प्राचीन ग्रंथ ***रींड पैपिरस*** *(Rhind Papyrus)* में उपलब्ध हैं। कोणों को अंशों में मापने का श्रेय भी बैबिलोनिया के निवासियों को जाता है। मिस्र व बैबिलोनिया के निवासी ज्यामिति को भूमि मापन एवं भवन निर्माण जैसे व्यवहारिक कार्यों में ही उपयोग करते थे। उपरोक्त से, ऐसा प्रतीत होता है कि सबसे पहले ज्यामितिविद् किसान, बढ़ई, नलकारी (plumbers) एवं राज मिस्त्री रहे होंगे।

एक अध्ययन योग्य विषय के रूप में इसके क्रमबद्ध विकास एवं विस्तार का श्रेय यूनानी विचारकों को जाता है जिन्होंने ज्यामिति का प्रारंभिक ज्ञान मिस्र से ही प्राप्त किया था। इस प्रकार ज्यामिति ने मात्र आकृतियों के मापन तक ही सीमित न रह कर बिन्दुओं, रेखाओं व तलों द्वारा निर्मित आकृतियों के विस्तृत अध्ययन का रूप ले लिया था। इस प्रक्रिया में **मिलेट्स** *(Miletus)* नामक शहर के एक व्यापारी ***थेल्स*** *(Thales)* (640-546 ई.पू.) का महत्वपूर्ण योगदान है। थेल्स ने युवावस्था में ही प्रचुर धन कमा लिया था तथा अपना शेष समय उसने देशाटन व अध्ययन-अध्यापन में ही व्यतीत किया। अपने मिस्र भ्रमण के दौरान वह ज्यामिति के अध्ययन की ओर आकर्षित हुआ तथा यूनान लौटकर अपने मित्रों को ज्यामिति पढ़ाने लगा। थेल्स के शिष्यों में प्रख्यात ***पाइथागोरस*** *(Pythagoras)* (580-500 ई. पू.) भी सम्मिलित था। यूनानी गणितज्ञों में सर्वाधिक महत्वपूर्ण नाम है ***यूक्लिड*** *(Euclid)* जिन्हें व्यापक रूप में अपने समय के समस्त गणितीय ज्ञान तथा विशेष रूप से ज्यामितीय ज्ञान को संग्रह करने व क्रमबद्ध करने का श्रेय जाता है। यह जानकारी उनके द्वारा 13 खंडों में लिखी गई प्रसिद्ध पुस्तक ***'एलीमेन्टस'*** *(Elements)* में दी गई है। इस पुस्तक के कारण ज्यामिति और यूक्लिड एक दूसरे के पर्याय बन गए

हैं। यूक्लिड के जीवन के बारे में कुछ अधिक ज्ञात नहीं हैं सिवाय इसके कि वे लगभग 300 वर्ष ई. पू. में एलेक्जेंड्रिया विश्वविद्यालय में शिक्षक थे।

यद्यपि ज्यामिति को एक क्रमबद्ध विषय के रूप में विकसित करने का श्रेय यूनानियों को जाता है, फिर भी भारत में ज्यामिति के अध्ययन की एक प्राचीन परंपरा रही है। प्राचीन भारत में यज्ञ, हवन आदि अनेक धार्मिक अनुष्ठानों के लिए वेदियों का निर्माण किया जाता था। बिना ज्यामितीय ज्ञान के विभिन्न प्रकार की *वेदियों* का निर्माण असंभव था। *'शुल्ब सूत्र'* , जिनका रचना काल लगभग 800-500 वर्ष ईसा पूर्व है, में इन वेदियों के निर्माण के लिए अनेक सूत्रों का उल्लेख किया गया है। *मोहनजोदाड़ो* व *हड़प्पा* (अब पाकिस्तान में), तथा *लोथल* (भारत के गुजरात राज्य में) की गई खुदाई से पता चला है कि प्राचीन भारत में ज्यामिति का उपयोग वेदी निर्माण के साथ-साथ भवनों, सड़कों, नगरों के निर्माण की रूपरेखा बनाने में भी किया जाता था। ज्यामिति के अध्ययन में उल्लेखनीय योगदान देने वाले भारत के कुछ प्राचीन गणितज्ञों के नाम हैं: *बोधायन* (800 ई.पू.), *आर्यभट्ट* (जन्म 476 ई), *ब्रह्मगुप्त* (जन्म 598 ई.) तथा *भास्कर* (जन्म 1114 ई.)।

परिमाप तथा क्षेत्रफल

अध्याय 14

14.1 भूमिका

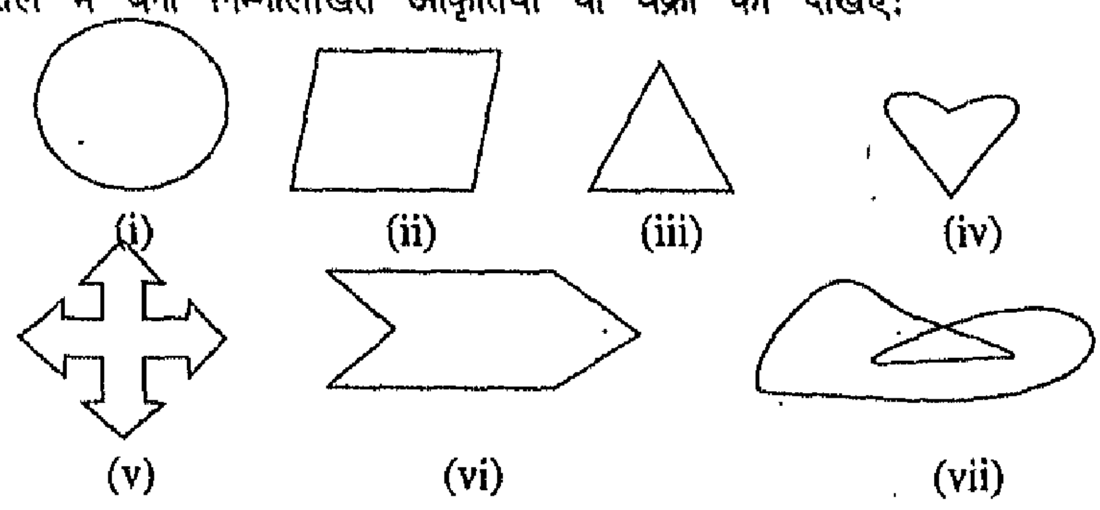
जिन सबसे पुराने गणित सम्बन्धी विचारों को हम जानते हैं, वे व्यावहारिक समस्याओं से उत्पन्न हुए। सबसे पहले सभ्य समाज को ***गिनने*** की आवश्यकता हुई। इस कारण ***संख्याओं*** का जन्म हुआ। जब लोगों ने गिनना सीख लिया और वे फसलें उगाने लगे तब नीचे लिखी समस्याएँ सामने आईं:

1. जिन खेतों में फसलें उगाई जाती थीं उनके चारों ओर बाड़ लगाना।
2. किसी प्रकार का माप नियत करना जिससे कि खेतों का विस्तार या परिमाण ज्ञात किया जा सके। यह आवश्यकता खेतों की तुलना, उनके बँटवारे और उन पर लगाए जाने वाले कर की गणना आदि के लिए पड़ी।

ऊपर बताई गई पहली समस्या को हल करने के लिए ***परिमाप*** *(perimeter)* की धारणा बनी और दूसरी के कारण ***क्षेत्रफल*** *(area)* की। इस अध्याय में, हम इन दोनों के विषय में पढ़ेंगे। ये दोनों ही व्यावहारिक जीवन् में बहुत उपयोगी हैं।

14.2 परिमाप

तल में बनी निम्नलिखित आकृतियों या वक्रों को देखिए:



आकृति 14.1

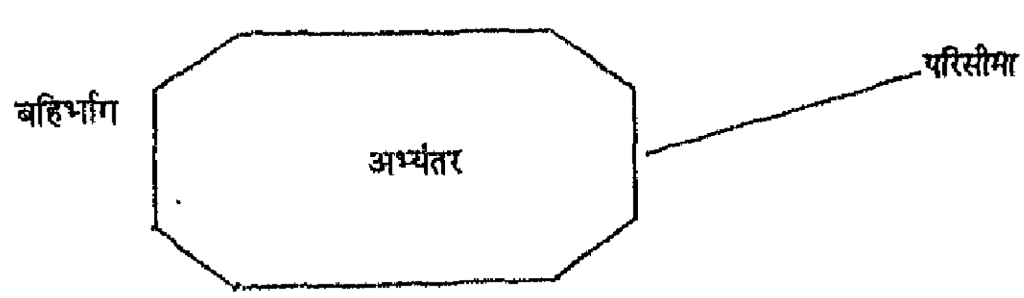
ध्यान दीजिए कि इनमें से प्रत्येक में आगे दिए गए गुणों (properties) में से एक या अधिक हैं:

1. आरम्भ के बिन्दु पर समाप्त होना।
2. अपने आप को न काटना।
3. केवल रेखाखंडों से बने होना।

जिन वक्रों में ऊपर बताया गया पहला गुण हो, अर्थात् जो वक्र जहाँ से आरम्भ होते हैं वहीं समाप्त भी होते हों, ***संवृत (closed)*** वक्र कहलाते हैं। दूसरे गुण वाले वक्र अर्थात् जो वक्र स्वयं को कहीं नहीं काटते, ***सरल (simple) वक्र*** कहलाते हैं। जिन वक्रों में पहला और दूसरा, दोनों ही गुण हों, वे ***सरल संवृत*** वक्र कहलाते हैं। उदाहरण के लिए, आकृति 14.1 के सभी वक्र संवृत हैं। वक्र (i) से (vi) तक सरल भी हैं परन्तु वक्र (vii) सरल नहीं है, क्योंकि यह अपने आप को काट रहा है। वक्र (ii), (iii), (v) और (vi) केवल रेखाखंडों से बने हैं।

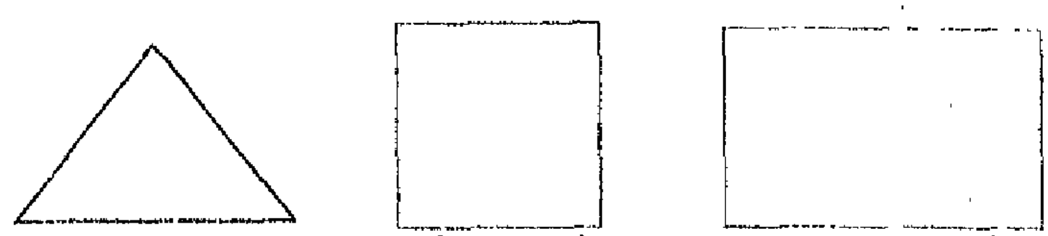
एक सरल संवृत वक्र जिस तल में बना होता है उसे यह तीन निम्न अलग-अलग भागों या क्षेत्रों में बाँट देता है:

1. वक्र स्वयं।
2. तल का वह क्षेत्र जो वक्र के भीतर, वक्र से घिरा हुआ होता है और इसका ***आंतरिक क्षेत्र*** *(interior region)* या ***अभ्यंतर*** *(interior)* कहलाता है।
3. तल का (शेष) वह भाग जो वक्र के बाहर होता है और इसका ***बाह्य क्षेत्र*** *(exterior region)* या ***बहिर्भाग*** *(exterior)* कहलाता है।



आकृति 14.2

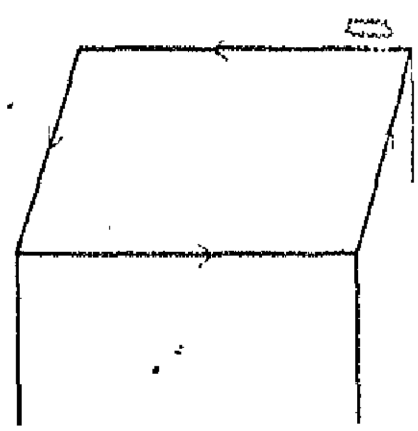
वक्र स्वयं अपने आंतरिक क्षेत्र की ***परिसीमा*** *(boundary)* होती है। व्यावहारिक कारणों से हमारी रुचि प्रायः वक्र और उसके आंतरिक क्षेत्र से बनी आकृति में होती है। आगे से हम ***क्षेत्र*** *(region)* शब्द का प्रयोग आंतरिक क्षेत्र और उसकी परिसीमा दोनों के सम्मिलित रूप के लिए करेंगे। निम्नलिखित आकृतियाँ क्रमशः एक त्रिभुजाकार, एक वर्गाकार, और एक आयताकार क्षेत्र दिखाती हैं:



आकृति 14.3

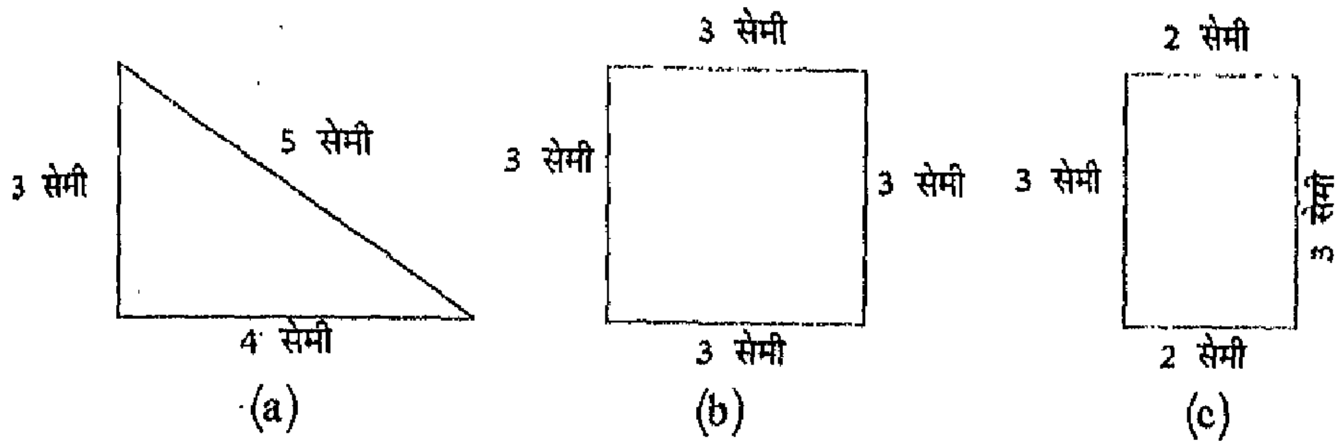
इन क्षेत्रों को परिसीमित करने वाले वक्रों में पहले बताया गया तीसरा गुण भी है। तात्पर्य यह है कि ये केवल रेखाखंडों से बने हैं। इसका लाभ यह है कि हम इनके ***सभी ओर की दूरी*** या इनकी ***परिसीमा** की लम्बाई* ज्ञात कर सकते है, क्योंकि हम रेखाखंडों को मापना जानते हैं। इनकी परिसीमा की लम्बाई को आकृति का *परिमाप* कहते हैं।

दृष्टांत 1: एक कीड़ा किसी आयताकार मेज की सतह के किनारे-किनारे रेंग रहा है। एक बार चारों ओर घूमकर वह वापिस अपने आरम्भ के स्थान पर आ जाता है। मेज की सतह एक आयताकार क्षेत्र है। कीड़े का पथ एक सरल संवृत वक्र है जो इस क्षेत्र को घेरे हुए है (आकृति 14.4)। दूसरे शब्दों में, कीड़े का यह पथ इस क्षेत्र की परिसीमा है। कीड़े द्वारा तय की गई दूरी इस आयताकार क्षेत्र, अर्थात् मेज की सतह का परिमाप है।



आकृति 14.4

दृष्टांत 2: आगे की आकृति 14.5(a) का परिमाप 3 सेमी + 4 सेमी + 5 सेमी, या 12 सेमी है। आकृति 14.5(b) का परिमाप 3 सेमी + 3 सेमी + 3 सेमी + 3 सेमी, या 12 सेमी है। आकृति 14.5(c) का परिमाप 2 सेमी + 3 सेमी + 2 सेमी + 3 सेमी, या 10 सेमी है।



आकृति 14.5

क्रियाकलाप:

1. अपने घर का एक कमरा चुन लीजिए। यदि कमरे का फर्श वर्गाकार या आयताकार हो, तो इसके सभी किनारों (भुजाओं) को माप कर और जोड़कर परिमाप निकालिए। अगर यह किसी अन्य आकार का हो, तो एक पतली रस्सी लीजिए। रस्सी को ध्यान से फर्श पर दीवारों के साथ-साथ इस प्रकार रखिए कि वह कहीं से ढीली न रह जाए। जब आरम्भ के स्थान पर पहुँच जाएँ, तो रस्सी को काट दें। अब इस प्रयुक्त रस्सी की लम्बाई नापकर कमरे का परिमाप ज्ञात कीजिए।

2. ऊपर वाली क्रिया से अपनी कक्षा, खेल के मैदान, मेजों, पुस्तकों, श्यामपट्ट आदि के परिमाप ज्ञात कीजिए।

3. त्रिभुज, वर्ग, आयत, चतुर्भुज जैसी कुछ आकृतियाँ खींचिए। इनमें से किसी एक के परिमाप का अनुमान लगाइए। नापकर ठीक कर लीजिए। अब यह अनुमान लगाने का प्रयास कीजिए कि शेष आकृतियों में से किस-किस के परिमाप पहले चुनी गई आकृति के परिमाप से अधिक होंगे और किस-किस के कम। वास्तविक परिमाप निकालकर अपने अनुमानों की सत्यता की जाँच कीजिए।

4. अपनी कापी में एक समबाहु त्रिभुज खींचिए। भुजाएँ नापकर उसका परिमाप ज्ञात कीजिए। क्या आप कुछ चतुराई दिखाकर अपना कार्य घटा सकते थे? यदि नहीं, तो एक भुजा नापकर उसको 3 से गुणा करने के विषय में क्या विचार है? जाँचिए कि क्या दोनों उत्तर समान हैं?

5. अपनी कापी में एक वर्ग बनाइए। उसकी भुजाएँ नापकर उसका परिमाप ज्ञात कीजिए। क्या कुछ चतुराई काम आएगी? यदि नहीं, तो एक भुजा नापकर उसे

4 से गुणा करिए। क्या यही परिमाप नहीं?

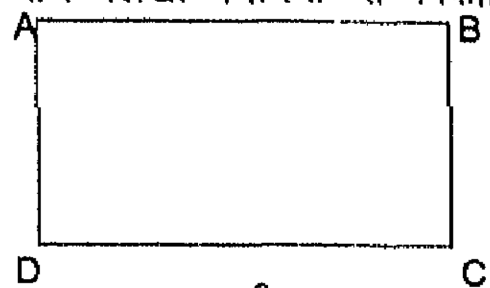
14.3 आयत का परिमाप

अपनी कापी में एक आयत ABCD बनाइए। इसकी भुजाओं AB, BC, CD और DA को मापिए। इस आयत का परिमाप नीचे लिखी विधियों से निकालिए:

(a) परिमाप $= AB + BC + CD + DA$

(b) परिमाप $= 2 \times AB + 2 \times BC$

(c) परिमाप $= 2 \times (AB + BC)$



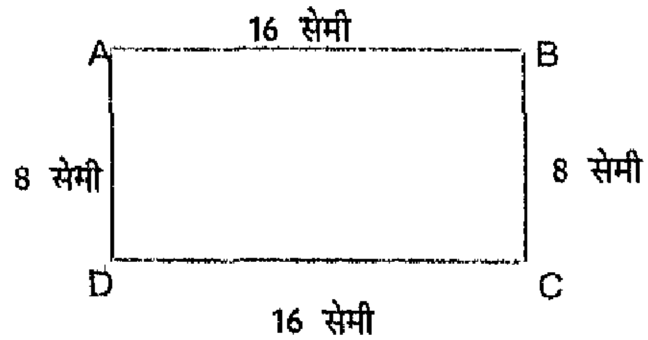
आकृति 14.6

आपने क्या देखा? क्या तीनों बार वही परिणाम आया? क्या आपको आश्चर्य हुआ? हुआ, तो नहीं होना चाहिए। केवल यह याद कीजिए कि प्रत्येक आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। आइए, एक विशेष उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1: उस आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 16 सेमी और 8 सेमी हैं।

हल: आयत को ABCD नाम दीजिए (आकृति 14.7)। अब,

AB = 16 सेमी, BC = 8 सेमी, CD = 16 सेमी, DA = 8 सेमी



आकृति 14.7

अतः, परिमाप = AB + BC + CD + DA

= 16 सेमी + 8 सेमी + 16 सेमी + 8 सेमी

= 48 सेमी

पुनः, परिमाप = AB + BC + CD + DA

$= (AB + CD) + (BC + DA)$

$= 2 \times AB + 2 \times BC$ (क्योंकि $AB = CD$ तथा $BC = DA$)

$= 2 \times 16$ सेमी $+ 2 \times 8$ सेमी

$= 32$ सेमी $+ 16$ सेमी

$= 48$ सेमी, पहले की भाँति।

पुनश्च, परिमाप $= AB + BC + CD + DA$

$= AB + BC + AB + BC$ (क्योंकि $CD = AB$ और $DA = BC$)

$= 2 \times (AB + BC)$

$= 2 \times (16$ सेमी $+ 8$ सेमी$)$

$= 48$ सेमी, पहले की ही भाँति।

अब यह स्पष्ट हो गया होगा कि किसी आयत ABCD का परिमाप निकालने के लिए नीचे दिए तीन सूत्रों में से किसी का भी प्रयोग किया जा सकता है:

I. आयत का परिमाप = लम्बाई + चौड़ाई + लम्बाई + चौड़ाई

II. आयत का परिमाप = 2 × लम्बाई + 2 × चौड़ाई

III. आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

ध्यान दीजिए कि पहले सूत्र में 3 बार योग करना पड़ता है, दूसरे में दो बार गुणा और 1 बार योग, जबकि तीसरे सूत्र में हमें केवल एक बार गुणा और एक बार योग करना पड़ता है। इस प्रकार तीसरा सूत्र सबसे सरल हुआ।

टिप्पणी: ऊपर के सूत्र III से हमें प्राप्त होता है:

(i) *लम्बाई* $= \frac{1}{2}$ *परिमाप* − *चौड़ाई*

(ii) *चौड़ाई* $= \frac{1}{2}$ *परिमाप* − *लम्बाई*

उदाहरण 2: लम्बाई 30 मी तथा चौड़ाई 20 मी वाले आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल: ऊपर बताए सूत्र I से,

आयत का परिमाप = लम्बाई + चौड़ाई + लम्बाई + चौड़ाई

= 30 मी + 20 मी + 30 मी + 20 मी

= 100 मी

सूत्र II का प्रयोग करने पर,

आयत का परिमाप = 2 × लम्बाई + 2 × चौड़ाई

= 2 × 30 मी + 2 × 20 मी

= 60 मी + 40 मी

= 100 मी

सूत्र III का प्रयोग करने पर,

आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 × (30 मी + 20 मी)

= 2 × 50 मी

= 100 मी

14.4 वर्ग का परिमाप

याद कीजिए कि वर्ग ऐसे आयत को कहते हैं जिसकी लम्बाई और चौड़ाई बराबर हों। अतः आयत का परिमाप निकालने वाले सभी सूत्रों का प्रयोग वर्ग का परिमाप ज्ञात करने के लिए भी किया जा सकता है। परन्तु क्योंकि वर्ग की चारों भुजाएँ बराबर होती हैं, अतः इसका परिमाप इसकी भुजा का चार गुना होता है। अब इस कथन की सत्यता जाँचते हैं।

I. वर्ग का परिमाप = लम्बाई + चौड़ाई + लम्बाई + चौड़ाई

= भुजा + भुजा + भुजा + भुजा

= 4 × भुजा

II. वर्ग का परिमाप = 2 × लम्बाई + 2 × चौड़ाई

= 2 × भुजा + 2 × भुजा

= 4 × भुजा

III. वर्ग का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 × (भुजा + भुजा)

= 4 × भुजा

टिप्पणी: ऊपर के किसी भी सूत्र से हम यह देख सकते हैं कि

$$\text{वर्ग की भुजा} = \frac{\text{वर्ग का परिमाप}}{4}$$

उदाहरण 3: दो पहलवानों को 30 मी भुजा वाले एक वर्गाकार अखाड़े में कुश्ती लड़नी है। दर्शकों को दूर रखने के लिए अखाड़े के चारों कोनों में एक-एक डंडा गाड़कर रस्सी से बाड़ बनानी है। गाँठें बाँधने के लिए यदि 2 मी रस्सी रखें, तो कुल कितनी रस्सी की आवश्यकता होगी?

हल : वर्गाकार अखाड़े के परिमाप में यदि 2 मी और जोड़ लें, तो आवश्यक रस्सी की लम्बाई ज्ञात हो जाएगी।

अब वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा

= 4 × 30 मी

= 120 मी

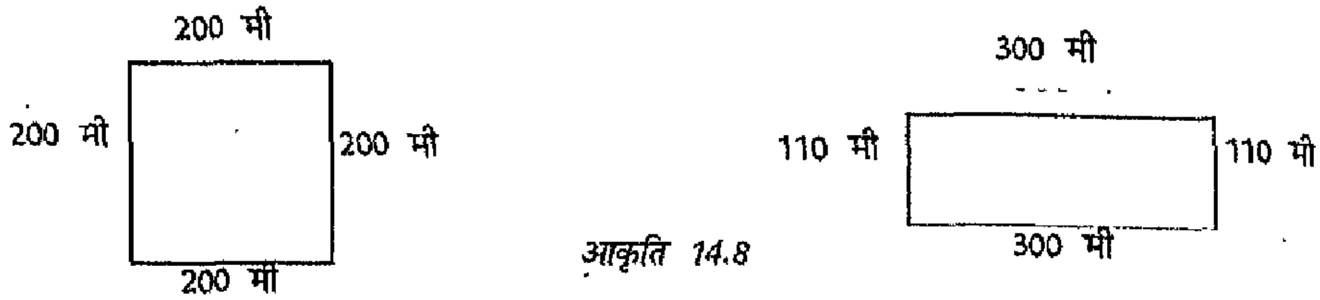
गाँठें बाँधने की 2 मी रस्सी मिलाकर कुल 122 मी रस्सी की आवश्यकता होगी।

उदाहरण 4: कमला और शकीला प्रातःकाल दौड़ लगाती हैं। कमला 200 मी भुजा वाले एक वर्गाकार मैदान के किनारे-किनारे दौड़ती रहती है [आकृति 14.8 (a)] और शकीला लम्बाई 300 मी तथा चौड़ाई 110 मी वाले एक आयताकार मैदान के किनारे-किनारे [आकृति 14.8 (b)]। यदि दोनों अपने-अपने मैदान के 3 चक्कर लगाएँ, तो कौन अधिक दौड़ती है और कितना अधिक?

हल : प्रत्येक लड़की एक चक्कर में अपने मैदान के परिमाप की बराबर दूरी तय करती है। अतः कमला एक चक्कर में दूरी तय करती है = 4 × भुजा

= 4 × 200 मी

= 800 मी



आकृति 14.8

(a) (b)

शकीला एक चक्कर में दूरी तय करती है

= 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 × (300 मी + 110 मी)

= 2 × 410 मी

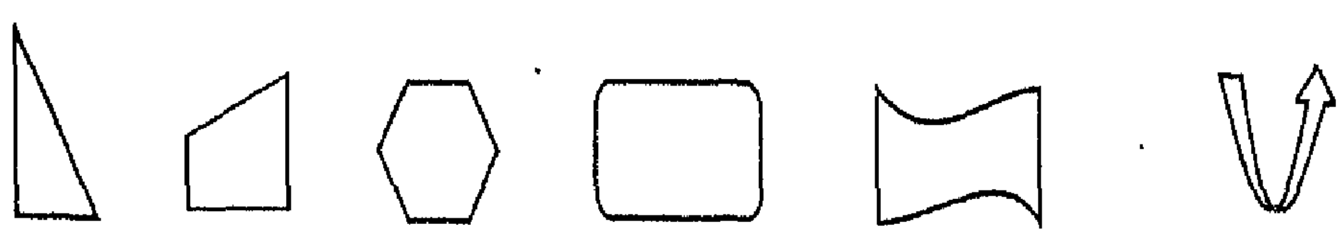
= 820 मी

अत: प्रत्येक चक्कर में शकीला कमला से (820 मी - 800 मी) = 20 मी की दूरी अधिक तय कर लेती है। इस प्रकार, शकीला कमला से अधिक दौड़ती है और तीनों चक्करों में कुल मिलाकर 60 मी की दूरी अधिक तय करती है।

●●●

प्रश्नावली 14.1

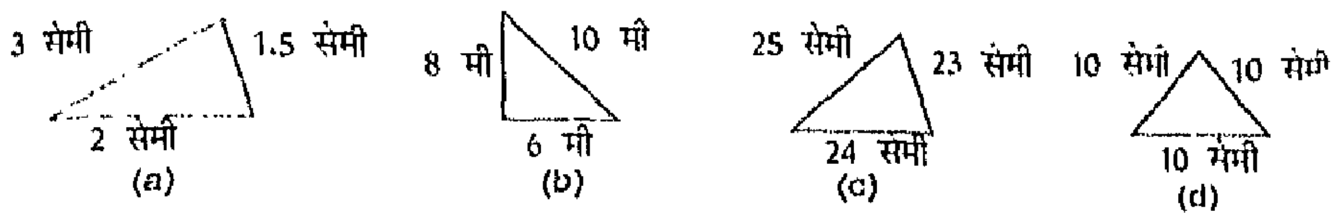
1. निम्नलिखित में कौन-कौन सी आकृतियाँ संवृत हैं? कौन-कौन सी सरल हैं?



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

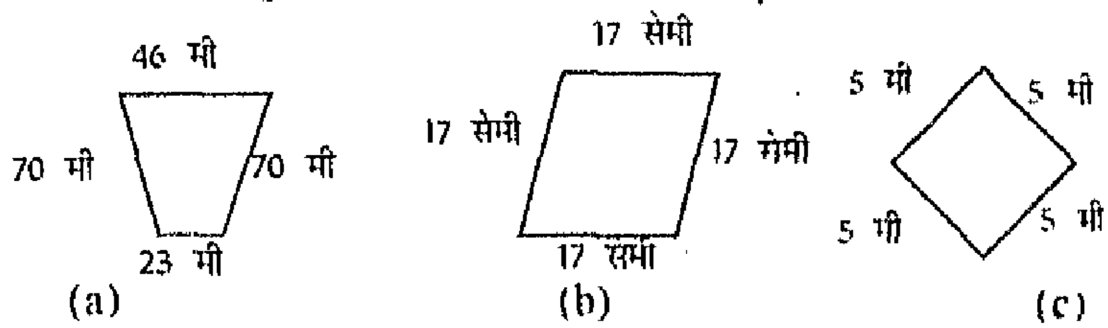
आकृति 14.9

2. निम्नलिखित प्रत्येक त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए:



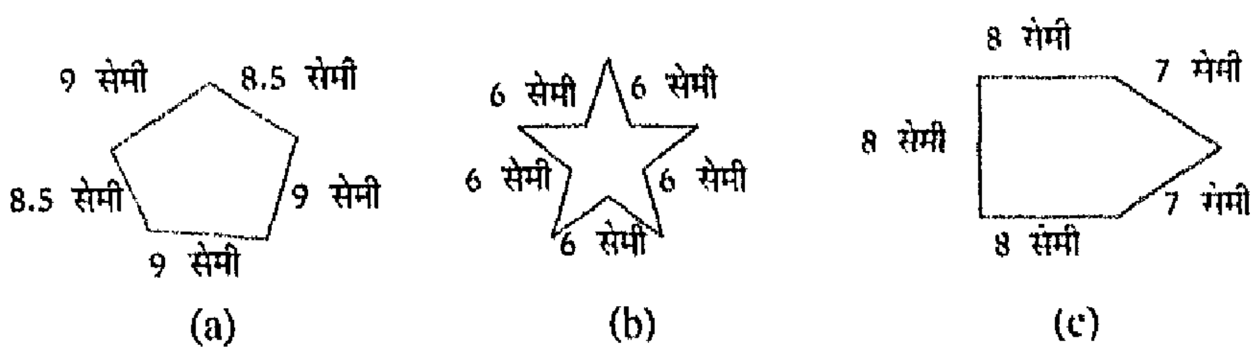
आकृति 14.10

3. निम्नलिखित आकृतियों के परिमाप ज्ञात कीजिए :



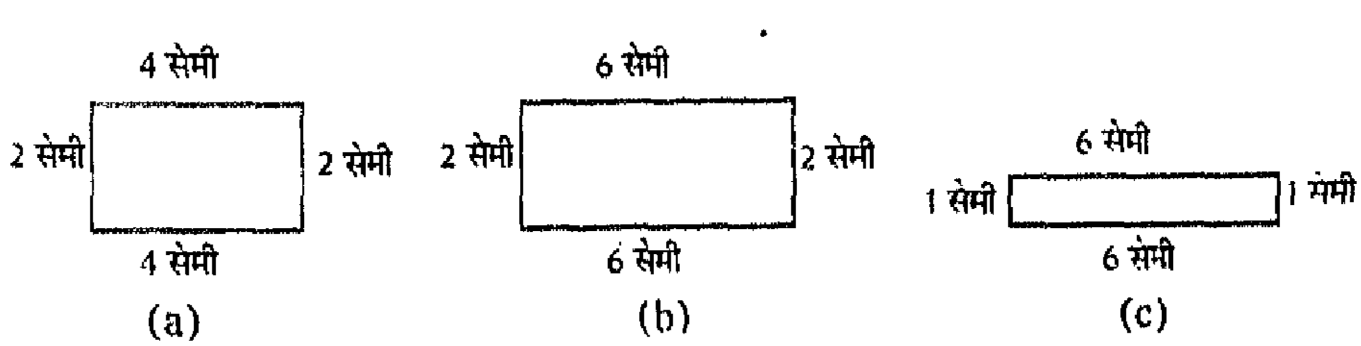
आकृति 14.11

4. निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक के लिए यह ज्ञात कीजिए कि इसके किनारे-किनारे एक चक्कर लगाने में कितनी दूरी तय करनी पड़ेगी।



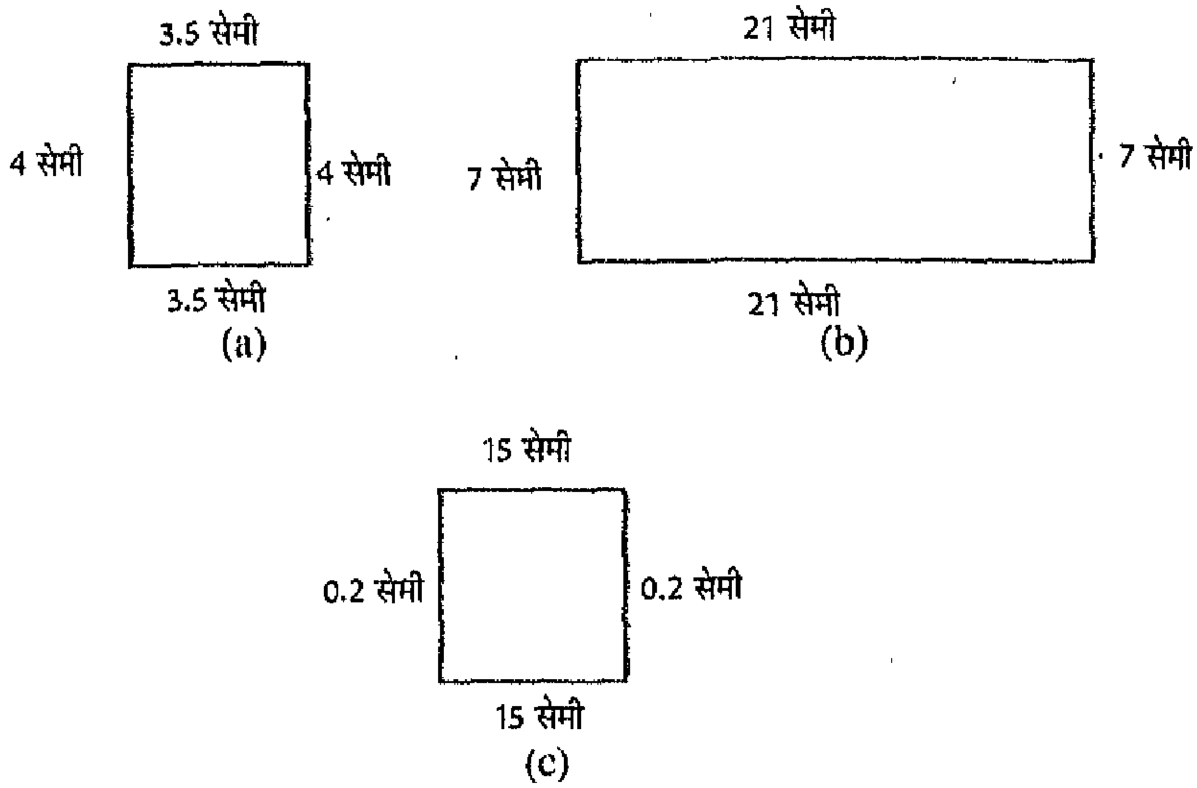
आकृति 14.12

5. निम्नलिखित प्रत्येक आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए:



आकृति 14.13

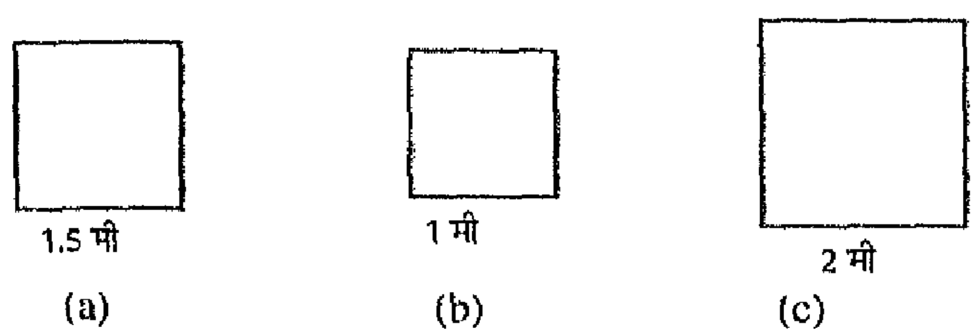
6. निम्नलिखित प्रत्येक आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए:



आकृति 14.14

(ध्यान से! ऐसा न हो कि कोई कहे आप आलुओं में भालुओं को जोड़ रहे हैं।)

7. निम्नलिखित प्रत्येक वर्ग का परिमाप ज्ञात कीजिए :



आकृति 14.15

8. उन आयतों के परिमाप ज्ञात कीजिए जिनकी लम्बाई और चौड़ाई नीचे दी गई हैं:

(a) 5 सेमी, 4 सेमी (b) 6 सेमी, 2 सेमी (c) 7 सेमी, 1.5 सेमी

9. जिन वर्गों के परिमाप नीचे दिए गए हैं, उनकी भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए:

(a) 100 सेमी (b) 16 मी (c) 40 सेमी (d) 22 मी

10. उस आयत की चौड़ाई ज्ञात कीजिए जिसका परिमाप 360 सेमी है और लम्बाई निम्नलिखित है :

    (a) 100 सेमी (b) 116 सेमी (c) 140 सेमी (d) 102 सेमी

11. एक त्रिभुज की दो भुजाएँ 15 सेमी और 20 सेमी हैं। इस त्रिभुज का परिमाप 50 सेमी है। इसकी तीसरी भुजा की लम्बाई क्या है?

12. पिंकी 75 मी भुजा वाले वर्गाकार मैदान के किनारे-किनारे तीन चक्कर लगाती है। वह कितनी दूरी तय करती है? बॉब लम्बाई 160 मी और चौड़ाई 105 मी वाले आयताकार मैदान के किनारे-किनारे दो चक्कर लगाता है। वह कितनी दूरी तय करता है? कौन अधिक दूरी तय करता है और कितनी अधिक?

13. स्वीटी 75 मी भुजा वाले वर्ग के किनारे-किनारे दौड़ती है और बुलबुल 60 मी लम्बाई और 45 मी चौड़ाई वाले आयत के किनारे-किनारे। कौन कम दूरी तय करती है?

14. 300 मी भुजा वाले वर्गाकार बगीचे के चारों ओर बाड़ बनाने का व्यय 20 रु प्रति मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

15. 300 मी लम्बाई और 200 मी चौड़ाई वाले आयताकार बगीचे के चारों ओर बाड़ बनाने का व्यय 24 रु प्रति मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

16. 36 सेमी परिमाप वाले कितने भिन्न-भिन्न आयत बनाए जा सकते हैं जिनकी लम्बाई और चौड़ाई सेमी में धनात्मक पूर्णांक हो?

    [**संकेत:** ध्यान रहे, प्रत्येक वर्ग भी एक आयत होता है।]

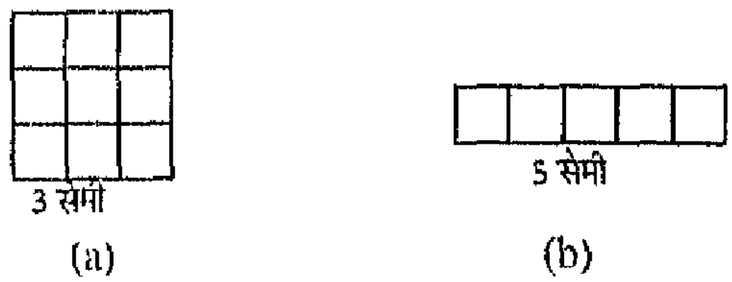
14.5 क्षेत्रफल : एक परिचय

पिछले अनुच्छेद में हमने सरल संवृत वक्रों से घिरे क्षेत्रों के विषय में बात की। याद कीजिए कि जब हम क्षेत्र शब्द की बात करते हैं, तो इसमें

1. सरल संवृत वक्र, और
2. तल का इस वक्र से घिरा हुआ भाग,

दोनों ही सम्मिलित होते हैं। क्षेत्र के सम्बन्ध में हम पहले एक संख्यात्मक राशि, *परिमाप* की बात कर चुके हैं। वास्तव में परिमाप और कुछ नहीं, क्षेत्र की परिसीमा

की लम्बाई मात्र है। नीचे दिए गए दो क्षेत्रों को देखिए:



आकृति 14.16

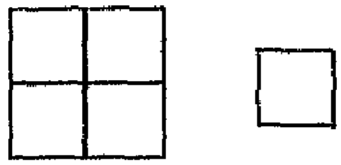
इन दोनों ही आकृतियों का परिमाप 12 सेमी है। किन्तु यह तो स्पष्ट दिखाई देता है कि इनसे घिरे हुए क्षेत्रों के परिमाण में बहुत अन्तर है। क्षेत्र (a) भुजा 1 सेमी वाले 9 वर्गों से भरा गया है जबकि क्षेत्र (b) में ऐसे 5 ही वर्ग समाए हैं। अत: एक प्रकार से आकृति 14.16 (a), आकृति 14.16 (b) से बड़ी है। इससे ज्ञात होता है कि बराबर परिसीमा वाले क्षेत्रों में घिरे हुए भाग का परिमाण बराबर होना आवश्यक नहीं। इस प्रकार दो क्षेत्रों के परिमाण की तुलना करने के लिए हमें परिमाप से कोई भिन्न संख्यात्मक माप निकालना होगा। यह माप ऐसा होना चाहिए कि क्षेत्र का परिमाण जितना अधिक हो, इस माप का मान भी उसी अनुपात में अधिक हो।

इस अनुच्छेद में हम आपको किसी क्षेत्र या आकृति के *क्षेत्रफल* की धारणा से परिचित कराएँगे। क्षेत्रफल की धारणा हमें क्षेत्र का परिमाण निश्चित करने में सहायक होगी। क्षेत्रफल की धारणा कोई मनोरंजन की वस्तु नहीं, इसके बहुत से व्यावहारिक लाभ हैं। उदाहरण के लिए, जीवन में आने वाली इन स्थितियों पर विचार कीजिए:

1. एक किसान का खेत आयताकार है। यह इसमें गेहूँ बोना चाहता है। स्पष्ट है कि बीज और खाद की मात्रा खेत के परिमाण या क्षेत्रफल पर निर्भर होगी। खेत जितना बड़ा होगा, आवश्यक मात्रा उतनी ही अधिक होगी। इसी प्रकार, उपज भी खेत के क्षेत्रफल पर निर्भर है। जितना बड़ा खेत, उतनी ही अधिक उपज।

2. एक बढ़ई को एक मेज की सतह पर पालिश करनी है। सतह जितनी बड़ी होगी, पालिश पर व्यय उतना ही अधिक होगा।

नीचे दी गई आकृतियों के युग्मों को देखिए :



(a) (b)

आकृति 14.17

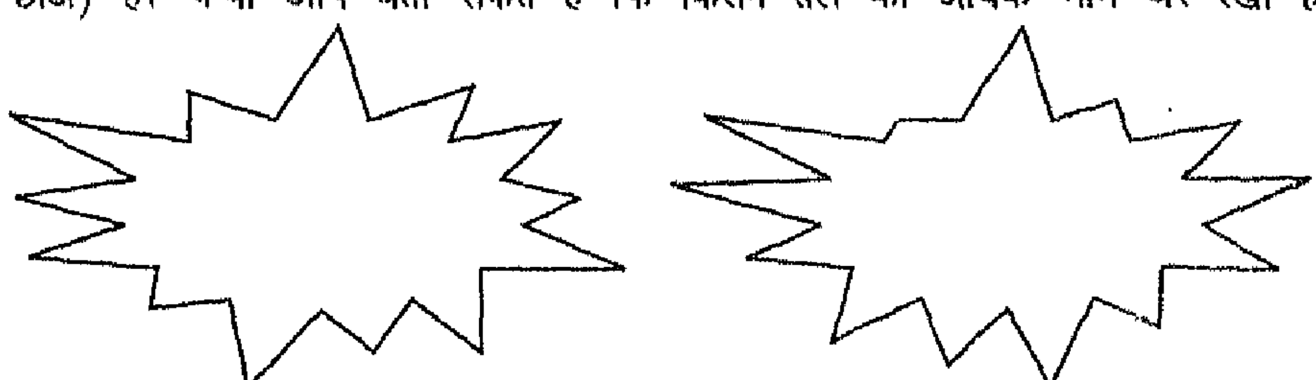


(a) (b)

आकृति 14.18

आप मानेंगे कि दोनों युग्मों में आकृति (a), आकृति (b) से बड़ी है। हम ऐसा सहज ही कह देते हैं, क्योंकि हमें स्पष्ट दिखाई देता है कि आकृति (a), आकृति (b) की तुलना में तल का अधिक भाग घेर रही है। इस तथ्य को हम यह कहकर *व्यक्त करते हैं कि आकृति (a) का क्षेत्रफल आकृति (b) के क्षेत्रफल से अधिक* है। इस प्रकार, सहज-ज्ञान से ***किसी सरल संवृत क्षेत्र/आकृति में घिरे तल के भाग के परिमाण को इस क्षेत्र का क्षेत्रफल कहते हैं।***

ऊपर की आकृतियों में हम केवल देखने भर से ही यह निश्चय कर सकते थे कि किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक है। परन्तु सदा ऐसा सम्भव नहीं होता। उदाहरण के लिए, नीचे की आकृतियों को देखकर बताइए कि कौन सी बड़ी (या छोटी) है। क्या आप बता सकते हैं कि किसने तल का अधिक भाग घेर रखा है?



आकृति 14.19

दूसरे शब्दों में, किसका क्षेत्रफल अधिक है? नहीं बता सकते न। इस प्रकार की कठिनाई से बचने के लिए, अब क्षेत्र के क्षेत्रफल को मापने की एक विधि की चर्चा की जाएगी।

याद कीजिए कि आप किसी रेखाखंड की लम्बाई कैसे मापते हैं। आप प्राय: इस प्रकार के कथन कहते हैं कि AB, 7 **सेमी लम्बा है** या कि PQ ***की लम्बाई*** 3 मी है। यहाँ हो क्या रहा है? वास्तव में हम एक नियत दूरी या लम्बाई को 1 सेमी कहने पर सहमत हैं। इस सहमति के बाद, यदि AB इस नियत लम्बाई का

7 गुना हो, तो हम कहते हैं कि AB, 7 सेमी है। इसी प्रकार, हम एक नियत दूरी या लम्बाई को 1 मी मानने पर सहमत हो जाते हैं। इसके बाद, यदि PQ इस नियत लम्बाई का 3 गुना हो, तो हम कहते हैं कि PQ, 3 मी है। इस प्रकार हम दूरी या लम्बाई AB को 1 सेमी के पदों में व्यक्त करते हैं। इसी भाँति दूरी या लम्बाई PQ को हम 1 मी के पदों में व्यक्त करते हैं। इस दूरी/लम्बाई 1 सेमी या 1 मी को हम यों ही अपनी इच्छा से कुछ भी नहीं ले लेते हैं। ये वास्तव में लम्बाई या दूरी मापने के ***मानक (standard) मात्रक (या इकाइयाँ)*** हैं। इन्हें हम मानक इस अर्थ में कहते हैं कि सभी व्यक्ति इन्हीं नियत दूरियों या लम्बाइयों को 1 सेमी (सेंटीमीटर) और 1 मी (मीटर) मानते हैं। हम सभी दूरियों या लम्बाइयों को किसी मानक इकाई में ही मापते हैं।

क्षेत्रफल मापने के लिए हम, लम्बाई मापने जैसी विधि अपनाएँगे। सभी क्षेत्रफल, क्षेत्रफल मापने के किसी मानक मात्रक के पदों में व्यक्त किए जाएँगे। एक बार पहले की गई चर्चा को याद करते हैं। हमने आकृति 14.16 (a) की, आकृति 14.16 (b) से, और आकृति 14.17 (a) की, 14.17 (b) से तुलना इनमें समाए हुए वर्गों को गिनकर की थी। क्योंकि प्रत्येक दशा में वर्गों का माप एक ही था, अतः अधिक वर्गों वाली आकृति को बड़ा बताया गया था। जिस आकृति में वर्गों की संख्या कम थी, उसे छोटा कहा गया था। प्रभावी रूप से हमने वर्ग को क्षेत्रफल मापने की इकाई मान लिया था। हम कह सकते थे कि 'आकृति 14.16 (a) का क्षेत्रफल 9 वर्ग है', 'आकृति 14.16 (b) का क्षेत्रफल 5 वर्ग है' इत्यादि। आकृति 14.18 में क्षेत्रफल मापने का हमारा मात्रक एक नियत आकार का त्रिभुज था। हम कह सकते थे कि 'आकृति 14.18(a) का क्षेत्रफल 4 त्रिभुज है' आदि।

यहाँ तक सब ठीक-ठाक चला क्योंकि अन्य कोई हमारे परिकलन में शामिल न था। परन्तु मान लीजिए कि कोई और भी एक दिए गए क्षेत्र का क्षेत्रफल माप रहा है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि राम और श्याम दोनों एक 4 सेमी लम्बे और 2 सेमी चौड़े आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल मापने का प्रयास कर रहे हैं। राम इस आयताकार क्षेत्र को 1 सेमी भुजा वाले वर्गों से ढकता है और श्याम $\frac{1}{2}$ सेमी भुजा वाले वर्गों से। देखिए आकृति 14.20 को। अब राम कहेगा कि इस आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 8 वर्ग है। श्याम पूरे विश्वास से इसी क्षेत्र के क्षेत्रफल को 32 वर्ग कहेगा।



राम का माप   श्याम का माप

आकृति 14.20

समस्या का स्रोत है क्या? समस्या यहाँ से उत्पन्न हुई है कि राम और श्याम दोनों उसी क्षेत्र का क्षेत्रफल अपनी-अपनी इच्छा से लिए गए भिन्न-भिन्न मापों के वर्गों से माप रहे हैं। यही कारण है कि इनके द्वारा बताए जा रहे क्षेत्रफल भिन्न-भिन्न हैं। इस प्रकार की गड़बड़ से बचने के लिए आवश्यक है कि हम किसी ऐसे मानक माप के वर्ग का प्रयोग करें जिसे सभी समझते हों।

14.6 क्षेत्रफल के कुछ मानक मात्रक

याद कीजिए कि 1 मिमी (मिलीमीटर), 1 सेमी (सेंटीमीटर) और 1 मी (मीटर) लम्बाई के कुछ मानक मात्रक हैं। क्योंकि क्षेत्रफल किसी क्षेत्र के परिमाण का माप है न कि लम्बाई का, अतः यह स्वाभाविक होगा कि क्षेत्रफल का मानक मात्रक कोई नियत **क्षेत्र** हो। हम देख ही चुके हैं कि क्षेत्रफल मापने के लिए वर्गाकार क्षेत्र सुविधाजनक होता है। क्योंकि प्रत्येक व्यक्ति जानता है कि 1 मिमी, 1 सेमी या 1 मी किस नियत लम्बाई को व्यक्त करता है, अतः हम भुजा 1 मिमी, 1 सेमी, या 1 मी वाले वर्ग को क्षेत्रफल का मानक मात्रक लेंगे।

भुजा 1 सेमी (सेंटीमीटर) वाले वर्ग के क्षेत्रफल को 1 वर्ग सेंटीमीटर (square centimetre) कहा जाता है और इसे संक्षेप में 1 सेमी^{2} (cm^2) या 1 वर्ग सेमी लिखा जाता है। जिस प्रकार 1 सेमी, लम्बाई का एक मानक मात्रक है, उसी प्रकार 1 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक मानक मात्रक है।



1 सेमी

आकृति 14.21



4 वर्ग सेमी या 4 सेमी^{2} 6 वर्ग सेमी या 6 सेमी^{2}

(a)   (b)

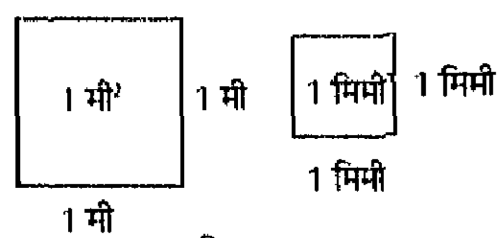
आकृति 14.22

आकृतियों 14.22(a) और 14.22(b) को देखिए। वर्ग सेंटीमीटर मात्रक में मापे गए इनके क्षेत्रफल इनके नीचे लिखे हुए हैं। आकृति 14.22(a) एक वर्गाकार क्षेत्र है। इसमें भुजा 1 सेमी वाले 4 वर्ग समाए हैं। क्योंकि ऐसे 1 वर्ग का क्षेत्रफल 1 सेमी^{2} है, अतः आकृति 14.22(a) के वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 4 सेमी^{2} कहलाएगा। इसी तर्क से आकृति 14.22(b) के आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 6 सेमी^{2} है।

व्यापक रूप से, ***यदि किसी सरल संवृत क्षेत्र R में p वर्ग सेंटीमीटर हों,*** तो हम कहते हैं कि

क्षेत्र R का क्षेत्रफल = p सेमी^{2}

जैसा कि पहले कहा जा चुका है, क्षेत्रफल के दो अन्य लोकप्रिय मानक मात्रक 1 मी^{2} और 1 मिमी^{2} हैं। यदि आपका अनुमान है कि ये क्रमशः भुजा 1 मी और भुजा 1 मिमी वाले वर्गों के क्षेत्रफल हैं, तो आपका अनुमान एकदम ठीक है।



आकृति 14.23

यदि किसी सरल संवृत क्षेत्र R में p वर्ग मीटर हों, तो हम कहते हैं कि

क्षेत्र R का क्षेत्रफल = p मी^{2}

इसी प्रकार, यदि किसी सरल संवृत क्षेत्र R में P वर्ग मिलीमीटर हों, तो हम कहते हैं कि

क्षेत्र R का क्षेत्रफल = p मिमी^{2}

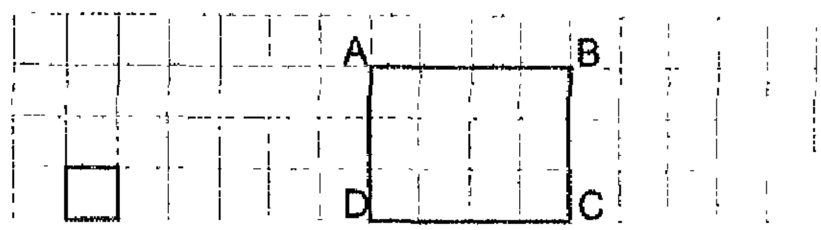
परन्तु इस पुस्तक में हम अधिकतर मात्रक सेमी^{2} का ही प्रयोग करेंगे। बाद में आपको इसे मिलाकर क्षेत्रफल के अन्य बहुत से मात्रकों के प्रयोग का अवसर मिलेगा।

आपके मन में यह प्रश्न उठ रहा होगा कि ऐसे क्षेत्रों का क्षेत्रफल कैसे मापेंगे जिन्हें क्षेत्रफल के हमारे किसी भी मानक मात्रक से पूरी तरह नहीं ढका जा सकता। अगले अनुच्छेद में इसका और इसके जैसे कुछ अन्य प्रश्नों का उत्तर देने का प्रयास किया जाएगा।

14.7 वर्गांकित कागज पर वर्ग गिनकर क्षेत्रफल निकालना :

आकृति 14.24 में वर्गांकित कागज का एक अंश दिखाया गया है। गहरे रंग की रेखाओं द्वारा इसे 1 सेमी भुजा वाले वर्गों में बाँटा गया है। इस आकृति में बाईं ओर ऐसा एक वर्ग दिखाया गया है।(वास्तव में, ये 1 सेंटीमीटर वर्ग, लम्बाई और चौड़ाई दोनों ओर, बराबर दूरी पर स्थित दस-दस और रेखाओं द्वारा 100 छोटे-छोटे वर्गों में बँटे रहते हैं। परन्तु ये छोटे वर्ग आकृति में दिखाए नहीं गए हैं।)। दाईं ओर के आयत ABCD में 12 वर्ग सेंटीमीटर हैं। फलत:

आयत ABCD का क्षेत्रफल = 12 सेमी^{2}



आकृति 14.24

वर्गांकित कागज का प्रयोग ऐसे क्षेत्रों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए भी किया जा सकता है जो वर्ग सेंटीमीटरों की किसी पूर्णांक संख्या से न ढके जा सकें। इस दशा में क्षेत्रफल का मान बिल्कुल ठीक न होकर वास्तविक मान के बहुत निकट होता है। उदाहरण के लिए निम्न क्रियाकलाप लेते हैं:

क्रियाकलाप 6 :

कुछ वर्गांकित कागज लीजिए। इस पर कुछ सरल संवृत क्षेत्रों की आकृतियाँ बनाइए जो (अभी तो) रेखाखंडों से बनी हों। नीचे दिए गए नियमों के अनुसार इनके क्षेत्रफल निकालिए:

नियम 1: इस क्षेत्र या आकृति में जो वर्ग पूरे-के-पूरे आ रहे हैं, उनकी संख्या गिनकर इस संख्या को x कहिए।

नियम 2: वे वर्ग गिनिए जिनका ठीक आधा भाग (लम्बाई, चौड़ाई में या विकर्ण के एक ओर) इस क्षेत्र में आता है। इन आधे-आधे वर्गों की संख्या को y कहिए।

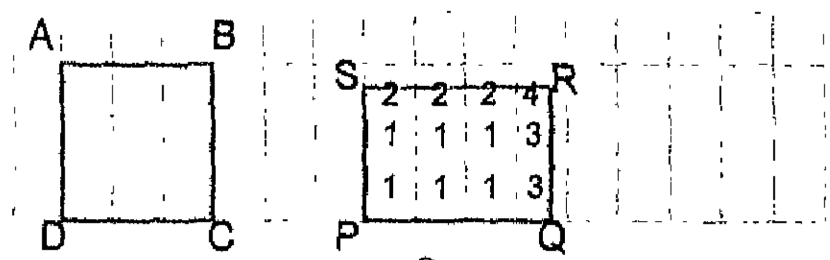
नियम 3: वे वर्ग गिनिए जिनका आधे से अधिक भाग (किन्तु पूरा नहीं) आकृति में घिरा हुआ है। इन वर्गों की संख्या को z कहिए।

नियम 4: जिन वर्गों का आधे से कम भाग आकृति में घिरा है, उन पर ध्यान मत

दीजिए अर्थात् इन्हें छोड़ दीजिए।

नियम 5: संख्या $A = x + \frac{1}{2} y + z$ ज्ञात कीजिए। आकृति का क्षेत्रफल लगभग A सेमी² है। यदि $z = 0$ हो और आपने कोई आंशिक वर्ग छोड़े भी नहीं है, तब A ठीक क्षेत्रफल के बराबर है (लगभग नहीं)। अन्यथा A क्षेत्रफल का सन्निकट (लगभग) मान है।

उदाहरण 5: आकृतियों ABCD तथा PQRS के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 14.25

हल: हम देखते हैं कि वर्ग ABCD में ठीक 9 पूर्ण वर्ग हैं। (इसमें कोई आधा-अधूरा वर्ग नहीं है।)

अतः ABCD का क्षेत्रफल = 9 सेमी²

जहाँ तक आयत PQRS का प्रश्न है, कुछ परिश्रम करना पड़ेगा। हम देखते हैं कि

1. आकृति में पूरे-के-पूरे समाए वर्गों की संख्या = 6
   [इनमें 1 लिखा है। इस प्रकार $x = 6$ है।]
2. आकृति में ठीक आधे-आधे वर्गों की संख्या = 3
   [इनमें 2 लिखा है। इस प्रकार $y = 3$ है।]
3. आकृति में आधे से अधिक (किन्तु पूरे नहीं) वर्गों की संख्या = 2
   [इन पर 3 लिखा है। इस प्रकार $z = 2$ है।]
4. आकृति में आधे से कम वर्गों की संख्या = 1
   [इस पर 4 लिखा है और इसे छोड़ देना है।]
5. क्षेत्र PQRS का क्षेत्रफल = $(x + \frac{1}{2} y + z)$ सेमी²

$$= \left(6+\frac{3}{2}+2\right)\text{सेमी}^2$$

$$= \frac{19}{2}\text{सेमी}^2$$

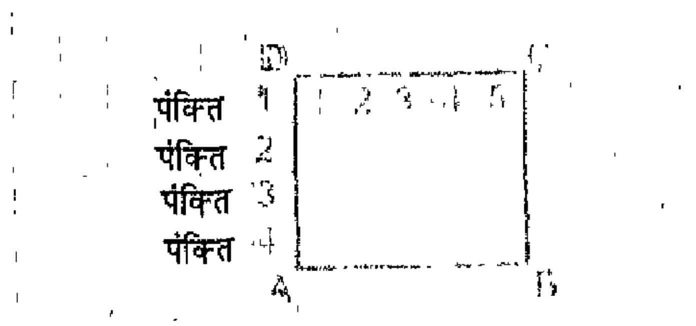
यह बिल्कुल ठीक क्षेत्रफल तो नहीं, पर क्षेत्रफल के मान के बहुत निकट है।

14.8 सूत्र के प्रयोग द्वारा आयत का क्षेत्रफल

आपने देखा कि हम वर्गांकित कागज का प्रयोग कर क्षेत्रफल ज्ञात कर तो लेते हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं कि हमें क्षेत्रफल का ठीक मान प्राप्त हो जाए। हम चाहेंगे कि कोई ऐसी विधि मिल जाए जिससे क्षेत्रफल का ठीक मान प्राप्त हो, यदि सब आकृतियों के लिए नहीं भी, तो कम-से-कम कुछ विशेष रूप वाली आकृतियों के लिए। चलिए, पहले कुछ प्रयोग करते हैं।

क्रियाकलाप 7:

वर्गांकित कागज पर एक आयत ABCD खींचिए। इसकी लम्बाई 5 सेमी तथा चौड़ाई 4 सेमी लीजिए। आप आकृति इस प्रकार बना सकते हैं कि आयत की भुजाएँ वर्गांकित कागज में खींची गई रेखाओं पर हों। इस आयत का क्षेत्रफल क्या है?



आकृति 14.26

आप सरलता से उत्तर दे सकते हैं कि 20 सेमी²। क्या आपने इस आकृति में घिरे वर्गों की संख्या एक-एक गिन कर निकाली? नहीं न । आपने देख ही लिया होगा कि आकृति में वर्गों की 4 पंक्तियाँ हैं और प्रत्येक पंक्ति में 5 वर्ग हैं।

इस प्रकार,

आकृति में घिरे वर्गों की संख्या = 4 × 5 = 20

जिससे कि क्षेत्रफल = 20 सेमी^{2}

क्या आपने ध्यान दिया कि पंक्तियों की संख्या आयत की चौड़ाई के बराबर थीं और प्रत्येक पंक्ति में वर्गों की संख्या आयत की लम्बाई के बराबर?

अब यह प्रयोग आप अपनी इच्छानुसार ली गई लम्बाई-चौड़ाई वाले कई आयतों पर करिए। अपने परिणाम नीचे दिखाए अनुसार एक सारणी में लिखिए।

लम्बाई l सेमी	**चौड़ाई b सेमी**	**1 वर्ग सेंटीमीटरों की संख्या**	**क्षेत्रफल A सेमी**	**टिप्पणी ($A = l \times b$)**
5	2	10	10	10 5 = × 2
6	3	18	18	18 = 6×3
7	4	28	28	28 = 7×4

निष्कर्ष: लम्बाई l तथा चौड़ाई b वाले आयत का क्षेत्रफल $A = l \times b$ है।

टिप्पणियाँ :

1. कुछ उदाहरणों के आधार पर कोई कथन सिद्ध नहीं किया जा सकता। हो सकता है कि अगले ही उदाहरण के लिए यह कथन सत्य न निकले। फिर भी हमने ऊपर का परिणाम ऐसे लिख दिया है जैसे कि यह l और b के सभी मानों के लिए सत्य हो। हमने ऐसा इसलिए किया क्योंकि हम पहले ही वह तर्क दे चुके थे जिसके कारण यह कथन सत्य होता-ही-होता है। याद कीजिए कि आपके पास वर्गों की उतनी ही पंक्तियाँ होती हैं जितनी कि आयत की चौड़ाई होती है। फिर प्रत्येक पंक्ति में उतने ही वर्ग होते हैं जितनी कि लम्बाई। अत: क्षेत्रफल को तो आयत की लम्बाई और चौड़ाई के गुणनफल के बराबर होना ही था। हाँ, इसके लिए लम्बाई और चौड़ाई को एक ही मात्रक में व्यक्त करना आवश्यक है, जैसे कि सेमी में। तब क्षेत्रफल सेमी^{2} में होता है।
2. सूत्र $A = l \times b$ में A, l तथा b मात्र संख्याएँ हैं, इनमें कोई मात्रक नहीं है। सूत्र के प्रयोग से पहले आपको यह देख लेना चाहिए कि l और b एक ही मात्रक

में हैं या नहीं। यदि न हों, तो एक को दूसरे के मात्रकों में बदलकर ही सूत्र का प्रयोग करना चाहिए। और तब A के साथ उपयुक्त मात्रक लगाना चाहिए। उदाहरण के लिए यदि l और b सेमी में हों, तो A सेमी^{2} में होगा।

3. $A = l \times b$ से हमें प्राप्त होता है: $l = \frac{A}{b}, b = \frac{A}{l}$

4. जब तक अन्यथा न बताया जाए, आयत की बड़ी भुजा के माप को इसकी लम्बाई, तथा छोटी भुजा के माप को इसकी चौड़ाई माना जाता है।

उदाहरण 6: उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 6 सेमी और 5 सेमी दी हैं।

हल: यहाँ लम्बाई-चौड़ाई दोनों एक ही मात्रक, सेमी, में दी गई हैं। हम सूत्र $A = l \times b$ का प्रयोग करेंगे जहाँ l आयत की लम्बाई (सेमी में), b इसकी चौड़ाई (सेमी) में) और A इसका क्षेत्रफल (सेमी^{2} में) है।

यहाँ $l = 6$ (सेमी में), $b = 5$ (सेमी में)

अतः क्षेत्रफल $= 6 \times 5$ (सेमी^{2} में) $= 30$ सेमी^{2}

वैकल्पिक हल: आयत की लम्बाई = 6 सेमी

आयत की चौड़ाई = 5 सेमी

अतः $A = l \times b$

$= 30$

फलतः आयत का क्षेत्रफल = 30 सेमी^{2}

टिप्पणी: संक्षेप में हम लिख सकते हैं कि

$l = 6$ सेमी, $b = 5$ सेमी, और $A = (6 \times 5)$ सेमी^{2}

$= 30$ सेमी^{2}

उदाहरण 7: एक आयताकार कमरे की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 1600 सेमी तथा 10 मी हैं। जो कालीन इस कमरे के फर्श को पूरा ढक ले, उसका क्षेत्रफल क्या होगा? इस कालीन को 25 रु प्रति मी^{2} की दर से ड्राइक्लीन कराने पर क्या व्यय आएगा?

हल : कालीन का क्षेत्रफल वही है जो कमरे के फर्श का। क्षेत्रफल के लिए सूत्र

$$A = l \times b$$

का प्रयोग किया जाएगा, जहाँ l और b क्रमशः मी में आयत की लम्बाई और चौड़ाई हैं तथा A मी^{2} में आयत का क्षेत्रफल है।

यहाँ l = 1600 सेमी

= 16 मी [क्योंकि 100 सेमी = 1 मी]

b = 10 मी

इसलिए क्षेत्रफल = (16 × 10) मी^{2} = 160 मी^{2}

क्योंकि 1 मी^{2} कालीन को ड्राइक्लीन कराने का व्यय = 25 रु है,

अतः 160 मी^{2} कालीन को ड्राइक्लीन कराने का व्यय = 160 × 25 रु

= 4000 रु

टिप्पणी: यह आवश्यक है कि लम्बाई और चौड़ाई एक ही मात्रक में हों। यहाँ दोनों को मीटरों में कर लिया गया।

14.9 सूत्र के प्रयोग द्वारा वर्ग का क्षेत्रफल

क्योंकि वर्ग ऐसा आयत है जिसके लिए लम्बाई = चौड़ाई होती है, अतः

वर्ग का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= भुजा × भुजा

= (भुजा)^2

उदाहरण 8 : 9 सेमी भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाएगा:

क्षेत्रफल A = (भुजा)^2

यहाँ भुजा = 9 सेमी

अतः क्षेत्रफल = 9^2 सेमी^{2} = 81 सेमी^{2}

उदाहरण 9 : उस आयत की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 125 सेमी^{2} और

जिसकी चौड़ाई 5 सेमी है।

हल : निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाएगा :

$$A = l \times b$$

जहाँ l और b क्रमशः सेमी में आयत की लम्बाई और चौड़ाई हैं, तथा A सेमी^{2} में उसका क्षेत्रफल है।

यहाँ $A = 125$ सेमी^{2}, और $b = 5$ सेमी

अतः $125 = l \times 5$

या $l = \dfrac{125}{5} = 25$

अतः आयत की लम्बाई 25 सेमी है।

वैकल्पिक हल: क्योंकि $l = \dfrac{A}{b}$, अतः $l = \dfrac{125}{5} = 25$ जिससे कि पहले की तरह लम्बाई 25 सेमी हुई।

● ● ●

प्रश्नावली 14.2

1. उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई व चौड़ाई नीचे दी गई हैं:

   (a) लम्बाई = 4 सेमी, चौड़ाई = 1 सेमी

   (b) लम्बाई = 4 सेमी, चौड़ाई = 2 सेमी

   (c) लम्बाई = 8 सेमी, चौड़ाई = 5 सेमी

   वर्गांकित कागज पर इन आयतों की आकृति खींचकर अपने परिणाम की सत्यता जाँचिए।

2. निम्नलिखित लम्बाई एवं चौड़ाई वाले आयतों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

   (a) लम्बाई = 24 सेमी, चौड़ाई = 10 सेमी

   (b) लम्बाई = 40 सेमी, चौड़ाई = 20 सेमी

   (c) लम्बाई = 20.4 सेमी,चौड़ाई = 10 सेमी

(d) लम्बाई = 41.5 सेमी,चौड़ाई = 30 सेमी

3. उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः निम्न हैं:

(a) 13 सेमी और 8 सेमी (b) 11 सेमी और 7 सेमी

(c) 8.5 सेमी और 6 सेमी (d) 1 मी और 75 सेमी

4. एक आयत का क्षेत्रफल 49 सेमी^{2} है और इसकी चौड़ाई 28 मिमी है। इस आयत की लम्बाई क्या है?

5. नीचे दी गई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल क्या होगा?

(a) 3 सेमी (b) 11 सेमी (c) 8.5 सेमी (d) $\frac{1}{2}$ मी

6. निम्नलिखित में से किसका क्षेत्रफल अधिक है और कितना अधिक?

(i) लम्बाई 24 सेमी और चौड़ाई 16 सेमी वाला आयत, या

(ii) भुजा 21 सेमी वाला वर्ग

7. आयत के क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव होगा जब

(i) लम्बाई को दुगुना कर दें और चौड़ाई वही रखें?

(ii) चौड़ाई को दुगुना कर दें और लम्बाई वही रखें?

(iii) लम्बाई और चौड़ाई दोनों को दुगुना कर दें?

8. वर्ग के क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव होगा, जब

(i) भुजा को दुगुना कर दें?

(ii) भुजा को तिगुना कर दें?

(iii) भुजा को आधा कर दें?

9. एक टाइल 25 सेमी भुजा वाले वर्ग के रूप में है। 3 मी भुजा वाले वर्गाकार स्नानगृह के फर्श को पाटने के लिए ऐसी कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी?

10. एक सेमी में 10 मिमी होते हैं। 1 वर्ग सेमी में कितने वर्ग मिमी होंगे?

[संकेत: 1 सेमी भुजा का वर्ग खींचिए। इसमें आर-पार लम्बाई और चौड़ाई में एक-एक मिमी की दूरी पर रेखाएँ खींचिए।]

11. 1 मी में 100 सेमी होते हैं। एक वर्ग मी में कितने वर्ग सेमी होंगे?

12. 16 सेमी भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल किसी 64 सेमी लम्बाई वाले आयत के क्षेत्रफल के बराबर है। आयत की चौड़ाई क्या है?

13. एक ही परिमाप के दो भिन्न आयत खींचिए। इनके क्षेत्रफलों की तुलना कीजिए। क्या ये बराबर हैं? क्या आप एक ही परिमाप के दो भिन्न वर्ग खींच सकते हैं?

14. आयत ABCD वर्ग नहीं है। इसकी लम्बाई वर्ग PQRS की भुजा के बराबर है। आयत ABCD और वर्ग PQRS में से किसका क्षेत्रफल अधिक है?

15. आयत ABCD वर्ग नहीं है। इसकी चौड़ाई वर्ग PQRS की भुजा के बराबर है। आयत ABCD और वर्ग PQRS में से किसका क्षेत्रफल कम है?

याद रखने योग्य बातें

1. एक समतल क्षेत्र के परिमाण को उसका ***क्षेत्रफल*** कहते हैं।
2. क्षेत्रों के क्षेत्रफलों की तुलना देखकर या मापकर की जाती है।
3. एक वर्ग सेंटीमीटर उस क्षेत्र के क्षेत्रफल को कहते हैं जो 1 सेमी भुजा वाले वर्ग से बनता है।
4. कुछ सूत्रः

(क) (i) आयत का परिमाप = 2 × लम्बाई + 2 × चौड़ाई
= 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

(ii) आयत की लम्बाई = $\frac{1}{2}$ × परिमाप − चौड़ाई

(iii) आयत की चौड़ाई = $\frac{1}{2}$ × परिमाप − लम्बाई

(ख) (i) वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा

(ii) वर्ग की भुजा = $\frac{1}{4}$ × परिमाप

(ग) (i) आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई
या $A = l \times b$

(ii) $b = \frac{A}{l}, l = \frac{A}{b}$

(iii) वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) 0 (ii) 1
2. (i) संभव नहीं (ii) संभव नहीं
3. (i) 92 (ii) 1999 (iii) 7007999
4. (i) 1000907 (ii) 2340701 (iii) 1039910
5. 19
6. हाँ ; नहीं
7. (i) 54, 55, 56 (ii) 722, 723, 724 (iii) 857, 858, 859
8. 1010000, 1010001, 1010002
9. 9410000, 9409999, 9409998
10. (i) F (ii) F (iii) F (iv) T (v) T
    (vi) F (vii) F (viii) T (ix) T (x) T

प्रश्नावली 1.2

1. (i) 283 (ii) 300507 (iii) 12345
2. (i) 45412 (ii) 45412 (iii) 923762 (iv) 923762
3. (i) 16112 (ii) 16112 (iii) 13000 (iv) 13000
4. (i) 1908 (ii) 4400
5. (i) 6856 (ii) 1305 (iii) 1235 (iv) 1454545

6. (i) 177281 और 70337 (ii) 80368 और 4618

7. (i)

$$\begin{array}{r} 973 \\ -441 \\ \hline 532 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{r} 876 \\ -239 \\ \hline 637 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{r} 5376 \\ -2859 \\ \hline 2517 \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ -\ \ 56791 \\ \hline 943209 \end{array}$$

8. एक 9. 19575 रु 10. 539 11. 4612 रु

12.

15	8	13
10	12	14
11	16	9

13.

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

14.

22	29	6	13	20
28	10	12	19	21
9	11	18	25	27
15	17	24	26	8
16	23	30	7	14

ावली 1.3

1. (i) 0 (ii) 675 (iii) 3709
   (iv) 10 (v) 15

2. (i) 173500 (ii) 16600 (iii) 291000
   (iv) 2790000 (v) 85500 (vi) 1000000

3. (i) 6 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 5

4. हाँ ; हाँ **5.** हाँ **6.** नहीं **7.** नहीं **8.** हाँ , 1

9. इनमें से एक संख्या शून्य है।

10. (i) 607920 (ii) 1245616 (iii) 104023689 (iv) 101741546

11. (i) 75808 (ii) 81984 (iii) 258048 (iv) 157210

12. (i) 2970 (ii) 5427900 (iii) 816500 (iv) 156250000
    (v) 461000 (vi) 887000 (vii) 5790 (viii) 73900
    (ix) 19225000 (x) 0

13. 999900 **14.** 1227500 रु **15.** मान हैं : 55, 120 और 210; हाँ

16. मान है: 7920 ; हाँ **17.** मान है: 999999 ; हाँ

18. मान है: 8000001 ; हाँ

ावली 1.4

1.

(i)	भागफल :	134	(ii)	भागफल :	1973
	शेष :	0		शेष :	8
(iii)	भागफल :	393	(iv)	भागफल :	12
	शेष :	39		शेष :	645
(v)	भागफल :	16	(vi)	भागफल :	309
	शेष :	25		शेष :	145

2. (i) 32475 (ii) 0 (iii) 486 (iv) 693

(v) 0 (vi) 138 (vii) 1 (viii) 800

3. 100050 **4.** 9960 **5.** 718 **6.** 30 **7.** 32198

8. 17 पंक्तियाँ **9.** 780 रु **10.** 10

11. हाँ, 1 के अतिरिक्त सभी पूर्ण संख्याएँ **12.** नहीं

13. (i), (iii) और (iv) **15.** नहीं

प्रश्नावली 2.1

1. (i) जनसंख्या में कमी

(ii) बैंक से धन निकालना

(iii) धन व्यय करना

(iv) पश्चिम को जाना/पूर्व की ओर आना

(v) 200 ई.

2. (i) + 3 (ii) − 5 (iii) − 25

(iv) − 100 (v) + 3 (vi) + 16

3. (i) 7 (ii) − 2 (iii) 0 (iv) 8

4. (i) − 8 (ii) − 12 (iii) − 15 (iv) − 356

5. (i) − 4, − 3, − 2, − 1, 0, 1 (ii) 1, 2, 3

(iii) − 3, − 2, − 1, 0, 1, 2, 3 (iv) − 6, − 5, − 4, − 3, − 2, −1

6. (i) $<$ (ii) $>$ (iii) $<$

(iv) $<$ (v) $<$ (vi) $>$

7. (i)	17	(ii)	23	(iii)	0		
(iv)	107	(v)	245	(vi)	1024		
8. (i)	F	(ii)	F	(iii)	T	(iv)	F
(v)	F	(vi)	F	(vii)	T		

प्रश्नावली 2.2

1. (i)	2	(ii)	– 4	(iii)	– 11		
(iv)	– 1	(v)	– 3	(vi)	– 10		
2. (i)	7	(ii)	– 3	(iii)	– 1	(iv)	– 10
3. (i)	–134	(ii)	2564	(iii)	9999	(iv)	–98645
(v)	–818	(vi)	–8994	(vii)	2004	(viii)	0
(ix)	–1	(x)	–5832	(xi)	–1100	(xii)	4690
4. (i)	0	(ii)	500	(iii)	600	(iv)	–481
(v)	2900	(vi)	1	(vii)	–2	(viii)	1216
(ix)	503	(x)	0				
5. (i)	–1	(ii)	–7	(iii)	4		
(iv)	8	(v)	–5	(vi)	0		
6. (i)	T	(ii)	F	(iii)	F		
(iv)	F	(v)	F	(vi)	F		

प्रश्नावली 2.3

1. (i)	5	(ii)	–6	(iii)	25	(iv)	100
(v)	–900	(vi)	–9	(vii)	3938	(viii)	–8656
(ix)	–122	(x)	155	(xi)	–1005	(xii)	–42920

2.	12, −12 ; नहीं		**3.**	36	**4.**	−70			
5.	(i)	<	(ii)	>		(iii)	>		
6.	(i)	6	(ii)	−19		(iii)	0		
	(iv)	−8	(v)	−140		(vi)	151		
7.	72		**8.**	−460					
9.	(i)	−4	(ii)	10		(iii)	−2	(iv)	0
	(v)	100	(vi)	−105		(vii)	6	(viii)	8
10.	−1	**11.** (i) F	(ii) T			(iii) T		(iv) T	
12.	−10	**13.** (i) 2	(ii) 0	**14.** चैन्नै, गिरावट 8°C					

प्रश्नावली 2.4

1.	(i)	−30	(ii)	−1800	(iii)	340	(iv)	−120
	(v)	162	(vi)	−1728	(vii)	360	(viii)	0
	(ix)	13320	(x)	24750	(xi)	−120	(xii)	1944

2.

द्वितीय संख्या (columns); *प्रथम संख्या* (rows)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16
-3	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12
-2	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-1	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
3	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12
4	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16

हाँ;हाँ ; $a \times b = b \times a$

3. (i)	0	(ii)	887000	(iii)	18300	(iv)	1894600
(v)	-1562500	(vi)	-4800				
4. (i)	हां	(ii)	हां	(iii)	नहीं	(iv)	नहीं
5. (i)	हां	6.	नहीं				
7. (i)	40	(ii)	−46	(iii)	0		
8. (i)	$(8+9)\times 10$	(ii)	$(8-9)\times 10$	(iii)	$[(-2)-(5)]\times(-6)$		
10. (i)	T	(ii)	F	(iii)	F (iv) F (v) F		

प्रश्नावली 2.5

1. (i)	−6	(ii)	−6	(iii)	6
(iv)	−4	(v)	3	(vi)	0
(vii)	−144	(viii)	125	(ix)	9
(x)	−10569	(xi)	−2000	(xii)	−1
2. (i)	1	(ii)	−3785	(iii)	0
(iv)	−3065	(v)	−312	(vi)	−567
3. (i)	T	(ii)	F	(iii)	F
(iv)	T	(v)	F	(vi)	F

प्रश्नावली 2.6

1. (i)	5, 4	(ii)	−2, 3	(iii)	1, 1
(iv)	−6, 1	(v)	−27, 2	(vi)	10, 5
2. (i)	10^4	(ii)	$(-13)^6$		
3. (i)	2500	(ii)	−1	(iii)	1

(iv)	1	(v)	256	(vi)	72
(vii)	256	(viii)	16	(ix)	-64
(x)	432	(xi)	-100	(xii)	576

4. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ; इकाई के अंक हैं: 0, 1, 4, 5, 6 और 9। अंक 2, 3, 7, 8 इकाई के स्थान पर नहीं आते।

5. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

6.	(i)	400	(ii)	10000	(iii)	40000
	(iv)	4900	(v)	22500	(vi)	1000000
7.	(i)	−1728	(ii)	2197	(iii)	-3375
	(iv)	1331	(v)	1000000	(vi)	1000000000
8.	(i)	1	(ii)	16	(iii)	81
	(iv)	1	(v)	16	(vi)	81

12.	(i)	F	(ii)	T	(iii)	T	(iv)	T
	(v)	T	(vi)	F	(vii)	F	(viii)	F

प्रश्नावली 2.7

1.	(i)	110	(ii)	0	(iii)	31	(iv)	3
	(v)	26	(vi)	−20	(vii)	13	(viii)	10
	(ix)	3	(x)	0				
2.	(i)	20	(ii)	44	(iii)	-38	(iv)	0
3.	(i)	29	(ii)	-43	(iii)	218		
	(iv)	87	(v)	119	(vi)	4		
	(vii)	71	(viii)	109	(ix)	11	(x)	15

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 1, 17 (ii) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

(iii) 1, 23 (iv) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

(v) 1, 2, 5, 10, 25, 50 (vi) 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

(vii) 1, 2, 4, 19, 38, 76 (viii) 1, 89

(ix) 1, 5, 25, 125 (x) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144

(xi) 1, 11, 23, 253 (xii) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729

2. (i) 16, 32, 48, 64, 80 (ii) 17, 34, 51, 68, 85

(iii) 19, 38, 57, 76, 95 (iv) 25, 50, 75, 100, 125

(v) 40, 80, 120, 160, 200

3. (ii); (iii) **4.** (i); (iii)

5. (i) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 (ii) 83, 89, 97

(iii) 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157

(iv) 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173

(v) 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199

6. एक **7.** (i), (iii), (v) **8.** हाँ, 9

9. 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96 **10.** भाज्य **11.** 1, 3, 7, 9

12. (i) नहीं (ii) चार । ये हैं: 4, 9, 25, 49

13. (i) 3 + 29 (ii) 3 + 37 (iii) 3 + 53 (iv) 7 + 73
(v) 7 + 89 (vi) 3 + 97

14. (i) 3 + 5 + 23 (ii) 5 + 7 + 23
(iii) 3 + 5 + 41 (iv) 3 + 7 + 53

प्रश्नावली 3.2

1. 2 से विभाज्य : (i), (ii), (iii), (iv), (v);
3 से विभाज्य : (i), (ii), (iii), (v), (vi);
5 से विभाज्य : (iii), (iv);
9 से विभाज्य : (i), (iii)

2. (i), (iii), (iv), (v), (vi)

3. (i), (ii), (iii), (v), (vi)

4. (i) F (ii) T (iii) T
(iv) F (v) T (vi) T

प्रश्नावली 3.3

1. (i) 2×2×2×2×3 (ii) 2×17
(iii) 2×7×7 (iv) 2×2×2×3×3×3
(v) 3×5×5×7 (vi) 2×2×3×3×13
(vii) 3×3×7×7 (viii) 2×2×3×3×3×5
(ix) 2×2×2×3×3×5×5×5 (x) 2×2×2×2×2×2×2×2×2
(xi) 3×5×11×13 (xii) 5×5×293

2. 10000, 2×2×2×2×5×5×5×5

3. 9999, 3×3×11×101

4. 7, 13, 19 ;दो क्रमागत गुणनखंडों का अंतर 6 है।

प्रश्नावली 3.4

1. (i) 18 (ii) 9 (iii) 1 (iv) 225
(v) 13 (vi) 10 (vii) 12 (viii) 53
(ix) 1 (x) 625

2. (i) 150 (ii) 13 (iii) 36 (iv) 55
(v) 58 (vi) 747

3. 65583, 65637 4. 1 5. 16

6. 170 *l* 7. 17 8. 75सेमी

9. (i) T (ii) T (iii) F
(iv) T (v) F

प्रश्नावली 3.5

1. (i) 240 (ii) 1386 (iii) 180 (iv) 90
(v) 3465 (vi) 90 (vii) 5760 (viii) 18480
(ix) 1620 (x) 6384

3. 4 4. नहीं 5. 221

6. नहीं, क्योंकि म.स. को ल.स. का एक गुणनखंड होना चाहिए।

7. 288 दिन 8. 3300 मी 9. 607

10. 122 मी 40 सेमी 11. 10080, 9660

12. 100800 13. 7 मिनट 12 सेकेंड

प्रश्नावली 4.1

1. (i) कक्षाओं की संख्या का अध्यापिकाओं की संख्या से अनुपात 4:6 है।
(ii) लम्बाई का चौड़ाई से अनुपात 2:1 है।
(iii) योग्यता-सूची में लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात 2:1 है।
(iv) गणित के एक टेस्ट में पास होने वाले विद्यार्थियों की संख्या का उस टेस्ट में बैठने वाले कुल विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात 2:3 है।

2. (i) भारत में गाँवों की संख्या नगरों की संख्या की 2000 गुनी है।
(ii) एक परीक्षा में पास होने वाले विद्यार्थियों की संख्या उस परीक्षा में बैठने

वाले कुल विद्यार्थियों की संख्या का $\frac{4}{5}$ है।

(iii) एक फैक्टरी में बनने वाली खराब पेंसिलों की संख्या अच्छी पेंसिलों की संख्या का $\frac{1}{9}$ है।

(iv) तनु किए गए एक अम्ल में अम्ल की मात्रा पानी की मात्रा का $\frac{2}{5}$ है।

3. (i) 8 : 3 (ii) 4 : 3 (iii) 3 : 5 (iv) 2 : 3

4. (i) 1 : 40 (ii) 1 : 25 (iii) 140 : 3 (iv) 3 : 10

(v) 240 : 1 (vi) 20 : 1 (vii) 3 : 5 (viii) 4 : 1

(ix) 3 : 50 (x) 4 : 1

5. (i) 40 : 3 (ii) 3 : 40

6. (i) 7 : 16 (ii) 9 : 16

7. (i) 37 : 191 (ii) 191 : 154 (iii) 37 : 154

8. (i) 7 : 11 (ii) 7 : 18 (iii) 11 : 18

9. 7 : 20

10. (i) 17 : 36 (ii) 19 : 36 (iii) 19 : 17

11. 2 : 15 **12.** 14 : 13 **13.** 3 : 350

14. (i) 11 : 19 (ii) 11 : 8

15. (i) 5 : 6 (ii) 4 : 5 (iii) 3 : 2

(iv) 2 : 5 (v) 3 : 2

प्रश्नावली 4.2

1. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं

(v) नहीं (vi) नहीं

2.	(i)	हाँ	(ii)	नहीं	(iii)	हाँ	(iv)	हाँ
3.	(i)	T	(ii)	T	(iii)	F	(iv)	T
	(v)	T	(vi)	F	(vii)	F	(viii)	T
	(ix)	F	(x)	T				
	(xi)	F (ध्यान दीजिए, यहाँ अनुपात नही बनाए जा सकते)						
4.	(i)	36	(ii)	12	(iii)	30		
	(iv)	7	(v)	45				
5.	50		6.	2				
7.	(i)	64 मी	(ii)	220 मी	(iii)	12 घंटे		
	(iv)	4 लड़कियाँ	(v)	24 लड़कियाँ				
8.	हाँ							
9.	(i)	49	(ii)	16	(iii)	54	(iv)	3

प्रश्नावली 4.3

1.	1360 रु	2.	3136 रु	3.	3380 किग्रा	4.	3 घंटे
5.	18 रु	6.	6 घंटे	7.	96 भाग	8.	624 रु
9.	8	10.	2400 किमी	11.	300 लीटर	12.	4.5 किलोवाट
13.	$\frac{135}{28}$ हेक्टेयर	14.	9 किग्रा	15.	14400रु	16	10000
17.	100	18.	300रु	19.	(i) 8 घंटे		(ii) 385 किमी
20.	(i) 10 किग्रा (ii) 48						

प्रश्नावली 5.1

1.	(i)	60%	(ii)	14%	(iii)	$162\frac{1}{2}\%$	(iv)	240%
	(v)	$33\frac{1}{3}\%$	(vi)	$187\frac{1}{2}\%$	(vii)	$3333\frac{1}{3}\%$	(viii)	25%

(ix) $31\frac{1}{4}\%$

2.	(i)	$\frac{1}{5}$	(ii)	$\frac{9}{25}$	(iii)	$\frac{21}{100}$
	(iv)	$\frac{3}{4}$	(v)	$1\frac{1}{10}$	(vi)	$3\frac{1}{2}$
	(vii)	$1\frac{1}{2}$	(viii)	$2\frac{1}{2}$	(ix)	1
3.	(i)	25%	(ii)	125%	(iii)	7%
	(iv)	960%	(v)	4%	(vi)	508%
	(vii)	90%	(viii)	120.5%	(ix)	1640%
4.	(i)	0.16	(ii)	0.28	(iii)	0.125
	(iv)	0.0625	(v)	0.76	(vi)	0.019
	(vii)	0.02	(viii)	0.002	(ix)	0.95

प्रश्नावली 5.2

1.	(i)	15 रु	(ii)	120	(iii)	3 मी
	(iv)	200 ग्रा	(v)	3 किग्रा	(vi)	650 मिली
	(vii)	1 रु	(viii)	75किग्रा	(ix)	81 रु
	(x)	4 लीटर	(xi)	35 किमी	(xii)	लीटर

2. 468 **3.** 300रु **4.** 425 रु, 8925 रु **5.** 7 किमी, 3 किमी

6. 6 मी **7.** 57690 **8.** 288 **9.** 726

10. 97.50 रु **11.** 918000000 **12.** 18000रु, 30000 रु

13. 87 लीटर, 493 लीटर **14.** 12 किमी/ घंटा, 132 किमी/घंटा

15. 90000 रु; 705000 रु, 705000 रु

प्रश्नावली 5.3

1. (i) 10% (ii) 6.4% (iii) $33\frac{1}{3}\%$ (iv) 24%

(v) $9\frac{1}{3}\%$ (vi) $33\frac{1}{3}\%$ (vii) $6\frac{2}{3}\%$ (viii) $43\frac{3}{4}\%$

(ix) 100% (x) 200%

2. 70% **3.** 80% **4.** 4% **5.** $6\frac{2}{3}\%$ **6.** $66\frac{2}{3}\%$

7. 32% **8.** $33\frac{1}{3}\%$ **9.** $33\frac{1}{3}\%$

10. 80% **11.** (i) $37\frac{1}{2}\%$ (ii) $12\frac{1}{2}\%$; 50%

12. (i) 25% (ii) $12\frac{1}{2}\%$ (iii) $62\frac{1}{2}\%$

13. 98% **14.** 90% **15.** 12% **16.** सुश्मिता

प्रश्नावली 5.4

1. (i) लाभ : 80 रु (ii) $20\frac{5}{6}$ हानि : 30 रु (iii) वि.मू.: 582 रु

(iv) वि.मू.: 2110 रु (v) क्र.मू. : 9900 रु (vi) क्र.मू. : 7900 रु

2. (i) वि.मू. : 540 रु; लाभ % : 20

(ii) वि.मू.: 3038 रु; हानि % : 2

(iii) हानि : 150 रु; हानि % : $20\frac{5}{6}$

(iv) लाभ : 237 रु, लाभ % : 15

(v) वि.मू.: 1996.40 रु; हानि: 173.60 रु

(vi) वि.मू.: 22896 रु; लाभ :1296 रु

(vii) क्र.मू. : 3000 रु; लाभ % : 20

(viii) क्र.मू. : 24320 रु; हानि % : $12\frac{1}{2}$

(ix) वि.मू.: 32000 रु; लाभ :6400 रु

(x) वि.मू. : 79200 रु; हानि : 8800 रु

3. हानि = 90 रु **4.** हानि = 25 रु **5.** लाभ : 50 %

6. हानि = 210 रु; वि.मू. = 3990 रु **7.** लाभ = 720 रु, वि.मू. = 9720 रु

8. $18\frac{2}{3}$ रु प्रति दर्जन **9.** 16560 रु **10.** हानि : 12%

11. 7520 रु **12.** 2900 रु **13.** हानि : 5%

14. 600 रु **15.** $28\frac{1}{8}$% लाभ

16. 15300 रु, 17850 रु, लाभ = $\frac{5}{11}$% **17.** लाभ : 10%

18. $153\frac{1}{3}$ रु प्रति सौ **19.** लाभ : 46% **20.** 2 रु

प्रश्नावली 5.5

1. (i) 120 रु (ii) 480 रु

(iii) ब्याज = 198 रु, मिश्रधन = 1998 रु

(iv) ब्याज = 260 रु, मिश्रधन = 2860 रु

(v) ब्याज़ = 945 रु, मिश्रधन = 6945 रु

2. 200 रु **3.** 20100 रु **4.** 120 रु **5.** 627 रु

6. 32400 रु **7.** ब्याज = 8320 रु, मिश्रधन = 60320 रु **8.** 6597.50 रु

9. 400 रु **10.** 1400 रु **11.** 19200 रु **12.** 460 रु

प्रश्नावली 6.1

1. (i) $6 + x$ (ii) $y + 3$ (iii) $\frac{x}{3}$ (iv) $\frac{x+y}{2}$

(v) $7-y$ (vi) $x-7$ (vii) $\frac{x}{y}-2$ (viii) $2x + 3$

(ix) x^2 (x) $5z$

2. (i) $z-5$ (ii) $x + 3$ (iii) $y - 4$

(iv) $z = x + 4$ (v) $z = x - 4$

3. (i) S = C + P, जहाँ S = विक्रय मूल्य, C = क्रय मूल्य, P = लाभ

(ii) A = P + I, जहाँ A = मिश्रधन, P = मूलधन और I = ब्याज

प्रश्नावली 6.2

1. (iv), (v), (vi), (x) एकपद हैं।

(i), (ix), (xi), (xii) द्विपद हैं।

(ii), (iii), (vii), (viii) त्रिपद हैं।

2. $-xy^2, 2xy^2; -7yx^2, 3x^2y; 6x^2y^2, -5y^2x^2; -6x^2z^2, -9x^2z^2, -18z^2x^2$.

3. $-3x, -3, 1, m, 17xz$

4. (i) $(2-y)$ (ii) y^2 (iii) $-7y$ (iv) $-5yz$

(v) $-8y^2$ (vi) $5y$

5. (ii) और (iv)

6. समान व्यंजक हैं :

$3(x^2+y^2), 3y^2+3x^2; 2x^3-y^3, -y^3+2x^3$

शेप व्यंजक हैं :

प्रश्नावली 6.3

1. $6xy$

2. (i) $a + b + c$ (ii) $17\,abc$ (iii) $23y - 22z$
(iv) $12a + 4b - 25c + 1$ (v) $x - 5xy + 1$ (vi) $2y$

3. (i) 0 (ii) $18x^2y$ (iii) $-x^2 - y^2 - z^2$
(iv) $-7x^2y$ (v) $22x^2$

4. (i) $2b$ (ii) $6x^2$ (iii) $2a - b$
(iv) $a - 3b + 2c$ (v) $7m^2 - 7m - 8$ (vi) $-a + b - c$
(vii) $3x^2 - x$ (viii) $2xy^2 - 5y^2 - 7$

5. (i) $-15y^2$ (ii) $-18ab$ (iii) $6a^2$
(iv) $-2a - 2b$ (v) $-2x^2 + 2y^2x - 2z$ (vi) $-2abc + 3a^2 + c^2$
(vii) $x^2 + 7xy - 3y^2$ (viii) $4m^2 - 6mn + 8$ (ix) $-2x^2 + 6x + 9$

6. $a^2 + 2b^2 - 4ab$ **7.** $7x^2 - 8y^2 - 9xy$ **8.** $a - c - 3$

9. $x^2 + 2xy - y^2$ **10.** $-24x + 21y - 15a$ **11.** $-x^2 + 2xy + y^2$

12. $-9m - 4n + 2p$ **13.** $-2x^3 - x - 2$ **14.** $-y + z$, शून्य

15. $-x^2 - 4y^2 - 2xy + 8y - 8$ **16.** $7x^2 + 2xy - 3y^2$ **17.** $5p - 9q - 4r$

18. $3x^2 + 18x - 13$

प्रश्नावली 6.4

1. (i) 3 (ii) 5 (iii) -8 (iv) -3
(v) -1 (vi) -3

2. (i) 3 (ii) 7 (iii) 1 (iv) 0
(v) 0 (vi) -7

3. (i) 1 (ii) -2

4.	(i)	−3	(ii)	0	(iii)	−2	(iv)	3
	(v)	4	(vi)	12	(vii)	−4	(viii)	−24
5.	1080		**6.**	95	**7.**	10	**8.**	−9

प्रश्नावली 7.1

1.	(i)	5	(ii)	35	(iii)	12	(iv)	72
	(v)	4	(vi)	3	(vii)	3		
2.	(i)	6	(ii)	6	(iii)	−4	(iv)	9
	(v)	4	(vi)	5				
	(vii)	4	(viii)	4	(ix)	−2		

प्रश्नावली 7.2

1.	(i)	−8	(ii)	11	(iii)	7	(iv)	2	(v)	2
	(vi)	4	(vii	−1	(viii)	6	(ix)	4	(x)	4
	(xi)	5	(xii)	3	(xiii)	−3	(xiv)	5	(xv)	−20
	(xvi)	108	(xvii)	42	(xviii)	72	(xix)	75	(xx)	48
	(xxi)	16	(xxii)	6	(xxiii)	7	(xxiv)	9	(xxv)	15
	(xxvi)	−2	(xxvii)	15						
2.	(i)	5	(ii)	0	(iii)	49	(iv)	27	(v)	33
	(vi)	4	(vii)	4						

प्रश्नावली 8.1

2. (i) रेखाएँ PQ, QR और PR (ii) रेखाएँ AB, BC, CD, AD, AC और BD

4. हाँ, असंख्य, अर्थात् अपरिमित **5.** एक और केवल एक रेखा

7. एक और केवल एक रेखा

8. क्योंकि एक रेखा की कोई निश्चित लम्बाई नहीं होती।

9. (i) रेखाएँ l और m; रेखाएँ m और n; रेखाएं l और n;

(ii) रेखाएँ p और q; रेखाएँ p और l; रेखाएं p और m; रेखाएँ p और n; रेखाएँ q और 1, रेखाएँ q और m; रेखाएँ q और n;

(iii) रेखाएँ p और l; (iv) रेखाएँ m और q;

(v) रेखाएँ p और n; (vi) बिंदु A, P, Q और R; बिंदु A, B, C और D;

11. (i) 6 (ii) रेखाएँ AB, BC, CD, DA, AC और BD

(iii) रेखाएँ AC, BC और CD.

12. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं

13. (i) बिंदु B, C और D (ii) रेखाएँ l, m और n; A संगमन बिंदु है।

14. (i) तीन (ii) कोई नही 15. हाँ

16. (a) बिंदु (b) रेखा (c) तल (d) प्रतिच्छेद करती हैं।

(e) संरेख (f) संगामी

17. (i) आठ बिंदु ; A, B, C, D, E, F, G और H

(ii) बारह ; किनारे AB, BC, GC, AG, AF, EF, GE, CD, DE, BH, HD और FH.

(iii) 6; फलक ABCG, AGEF, FEDH, HDCB, ABHF और GCDE.

18. (i) T (ii) F (iii) F (iv) F

(v) T (vi) F (vii) T

प्रश्नावली 9.1

1. (i) दो, रेखाखंड AB और BC।

(ii) सात; रेखाखंड AB, BC, CD, DE, AC, AD और AE।

(iii) दस; रेखाखंड AB, BC, CD, DA, AE, EB, EC, ED, AC और BD ।

(iv) 6; रेखाखंड AB, AC, BC, BD, CD, AD ।

2. (i) नहीं (ii) हां (iii) नहीं (iv) नहीं

प्रश्नावली 10.1

2. (i) P (ii) C (iii) Y

3. (i) प्रारम्भिक बिंदु O वाली किरणें OP, OT, OR, OQ और OS है।
प्रारम्भिक बिंदु P वाली किरणें PT, PR, PO, PQ और PS है।
प्रारम्भिक बिंदु Q वाली किरणें QS, QO, QP, QT और QR है।
प्रारम्भिक बिंदु T वाली किरणें TR, TP, TO, TQ और TS है।

(ii) नहीं (iii) हाँ

4. आठ; किरणें OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH

प्रश्नावली 10.2

2. (i) शीर्ष P, भुजाएँ PQ और PR; (ii) शीर्ष B, भुजाएँ BA और BC;
(iii) शीर्ष Y, भुजाएँ YX और YZ; (iv) शीर्ष M, भुजाएँ MN और ML.

4. 6; कोण AOB, BOC, COD, AOC, BOD और AOD;

5. कोण BAD, ABD, ADB, BDC, DBC, DCB, ADC और ABC; दो

6. (i) बिंदु A, D और F; (ii) बिंदु B और C;
(iii) बिंदु P, G, Q, E और R.

7. (i) कोण DAE या EAD (ii) कोण BAC या CAB
(iii) कोण ACD या DCA (iv) कोण ADC या CDA
(v) कोण AFE या EFA

8. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) हाँ (v) नहीं

	(iii)	कोण ACD या DCA			(iv)	कोण ADC या CDA				
	(v)	कोण AFE या EFA								
8.	(i)	नहीं	(ii)	हाँ	(iii)	हाँ	(iv)	हाँ	(v)	नहीं

प्रश्नावली 10.3

1.	(i)	$\angle 1$	(ii)	$\angle a$	(iii)	$\angle 4$	(iv)	$\angle d$		
2.	(a)	नहीं	(b)	हाँ	(c)	हाँ	(d)	नहीं		
3.	(i)	अधिक	(ii)	सम	(iii)	ऋजु	(iv)	बृहत		
	(v)	न्यून	(vi)	न्यून						
4.	समकोण		**5.**	(i)	दक्षिण-पश्चिम		(ii)	उत्तर-पूर्व		
6.	(i)	न्यून	(ii)	अधिक	(iii)	न्यून				
	(iv)	ऋजु	(v)	बृहत्	(vi)	संपूर्ण				
	(vii)	शून्य	(viii)	सम						
8.	(i)	ऋजु	(ii)	सम	(iii)	ऋजु				

प्रश्नावली 10.4

1. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) हाँ (v) हाँ

2. (i) कोण युग्म (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 5);

(ii) कोण युग्म (1, 3), (2, 4), (5, 7) और (6, 8)

3. नहीं, क्योंकि इनमें उभयनिष्ठ शीर्ष नहीं है।

4.	(i)	35°	(ii)	17°	(iii)	45°	(iv)	65°	(v)	40°
5.	(i)	110	(ii)	115°	(iii)	135°	(iv)	90°	(v)	45°
6.	(i)	पूरक	(ii)	संपूरक	(iii)	पूरक	(iv)	पूरक		
	(v)	संपूरक	(vi)	संपूरक	(vii)	पूरक	(viii)	पूरक		

7. समकोण 8. 45°

9. इस प्रकार बद्धि होती है कि दोनों कोणों का योग एक ही रहता है।

10. अधिक कोण 11. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ

12. 45° से कम 13. (i) $x = 65°$ है, $y = 145°$ है, और $z = 35°$ है।

(ii) $x = 115°$ है, $y = 65°$ है, और $z = 115°$ है।

14. (i) T (ii) F (iii) T (iv) F

(v) T (vi) T

प्रश्नावली 11.1

1. (i) और (ii) में, l तिर्यक रेखा है।

2. (i) $\angle c, \angle d, \angle e, \angle f$;

(ii) $\angle a, \angle b, \angle h, \angle g$;

(iii) $(\angle a, \angle e)$; $(\angle b, \angle f)$; $(\angle d, \angle h)$; $(\angle c, \angle g)$;

(iv) $(\angle d, \angle f)$; $(\angle c, \angle e)$;

(v) $\angle PQR$;

(vi) क्रमशः $\angle RQD$ और $\angle PQE$

प्रश्नावली 11.2

1. (i) PR||BC, PQ||AC, PR||QC, PQ||RC, PR||BQ, PQ||AR

(ii) AB||CD, BC||AD, AE||FC, AF||EC, BC||AF, EC||AD, BE||FD, BE||AF, BE||AD, FD||BC, FD||EC

(iii) AB||DE, BC||EF, CD||AF

(iv) AB||RP, AC||PQ, BC||QR

2. नहीं

प्रश्नावली 11.3

1. $\angle a = 115°$, $\angle c = 115°$, $\angle d = 65°$, $\angle e = 115°$, $\angle f = 65°$, $\angle g = 115°$, $\angle h = 65°$

2. $\angle RPB = 145°$

3. (i) $\angle x = 45°$ (ii) $\angle x = 60°$

4. $\angle DEF = 50°$

प्रश्नावली 12.1

1. (i) तीन (ii) तीन (iii) तीन (iv) छः

2. नहीं **3.** त्रिभुज, ΔLMN

4. (a) LN (b) ∠ N (c) M (d) LM

5. बारह; Δ ADE, Δ ABE, Δ ADC, Δ ABC, Δ BFC, Δ BFD, Δ BDE, ΔCEF, ΔCED, Δ DEF, Δ BCD, Δ BEC

6. (i) Δ ADE, Δ ABE, Δ ADC, Δ ABC.

(ii) Δ BEA, Δ BAC, Δ BFC, Δ BFD, Δ BDE, Δ BDC, Δ BEC

(iii) Δ CDA, Δ CBA, Δ CBF, Δ CEF, Δ CED, Δ CBD, Δ CBE

(iv) ΔDAE, ΔDAC, ΔDBF, ΔDBE, ΔDEC, ΔDEF, ΔDBC

(v) Δ EDA, Δ EBA, Δ EBD, Δ ECF, Δ ECD, Δ EFD, Δ EBC

(vi) Δ FBC, Δ FEC, Δ FED, Δ FDB

7. Δ ADE, Δ ADC, ΔCEF, ΔCED, Δ DEF;
Δ ABC, Δ ABE, Δ DEA, Δ DAC, Δ DBF, Δ DBE,
Δ DEC, Δ DEF, Δ DBC

8. बिंदु P, Q, R, G, A, D और C; P, Q, R, G, A और D

9. Δ AOD, Δ BOC, Δ COA, Δ AOD, Δ ABD, Δ ABC, Δ ACD, Δ BCD।
(i) Δ BOC, Δ BDC, Δ ABC. (ii) Δ ABD, Δ ACD, Δ AOD

(iii)	ΔDOC, ΔBOC, ΔBCD	(iv)	कोई नहीं	(v)	कोई नहीं

प्रश्नावली 12.2

2.	(ii), (iii), (iv), (v)							
3.	(i)	90°	(ii)	90°	(iii)	90°	(iv)	90°;हाँ
4.	90°		**5.**	46°	**6.**	प्रत्येक 60°	**7.**	10°
8.	360°		**9.**	540°	**10.**	110°		
11.	(i)	∠CBA	(ii)	∠CAB और ∠BCA				
12.	(i)	∠ABC	(ii)	∠ABC + ∠ACB				
	(iii)	∠BAC + ∠ACB						
13.	प्रत्येक	40°						
15.	(i)	नहीं	(ii)	हाँ	(iii)	नहीं	(iv)	नहीं
	(v)	हाँ	(vi)	हाँ	(vii)	नहीं		
16.	(i)	हाँ	(ii)	हाँ	(iii)	हाँ	(iv)	नहीं
	(v)	नहीं	(vi)	हाँ				
17.	(i)	<	(ii)	<	(iii)	<		
18.	(i)	F	(ii)	F	(iii)	F	(iv)	T

प्रश्नावली 12.3

1.	(i)	समद्विबाहु Δ	(ii)	समबाहु Δ	(iii)	विषमबाहु Δ
	(iv)	विषमबाहु Δ	(v)	विषमबाहु Δ		
2.	(i)	न्यून कोण Δ	(ii)	अधिक कोण Δ	(iii)	समकोणΔ
	(iv)	अधिक कोण Δ	(v)	समकोण Δ	(vi)	न्यून कोणΔ
3.	(i)	समद्विबाहु Δ	(ii)	समबाहु Δ	(iii)	विषमबाहु Δ
	(iv)	विषमबाहु Δ	(v)	समबाहु Δ	(vi)	समद्विबाहु Δ
4.	(i)	समकोण Δ	(ii)	अधिक कोण Δ	(iii)	न्यून कोण Δ

(iv) अधिक कोण Δ (v) समकोण Δ (vi) न्यून कोण Δ

प्रश्नावली 13.1

1. (a) 90° (b) 30° (c) 120°

प्रश्नावली 13.2

4. हाँ **5.** दो

प्रश्नावली 13.3

4. वर्ग **6.** 6 सेमी **7.** 10 सेमी **8.** हाँ

10. (a) वृत्त पर स्थित होते हैं।

(b) केन्द्र पर, वृत्त पर स्थित होता है।

(c) से होकर जाती है।

(d) एक चाप

12. हाँ

प्रश्नावली 13.4

2. हाँ **3.** हाँ **4.** केन्द्र पर

प्रश्नावली 13.5

3. हाँ

प्रश्नावली 13.6

3. हाँ **5.** हाँ

प्रश्नावली 14.1

1. (a), (c), (d), (e) और (f) संवृत वक्र हैं। (a), (c), (d) और (e) सरल वक्र हैं।

2. (a) 6.5 सेमी (b) 24 मी (c) 72 सेमी (d) 30 सेमी

3.	(a)	209 मी	(b)	68 सेमी	(c)	20 मी		
4.	(a)	44 सेमी	(b)	60सेमी	(c)	38 सेमी		
5.	(a)	12 सेमी	(b)	16 सेमी	(c)	14 सेमी		
6.	(a)	15 सेमी	(b)	56 मी	(c)	70 सेमी		
7.	(a)	6 मी	(b)	4 मी	(c)	8 मी		
8.	(a)	18 सेमी	(b)	16 सेमी	(c)	17 सेमी		
9.	(a)	25 सेमी	(b)	4मी	(c)	10 सेमी	(d)	5.5 मी
10.	(a)	80 सेमी	(b)	64 सेमी	(c)	40 सेमी	(d)	78 सेमी

11. 15 सेमी **12.** 900 मी 1060 मी बॉब, 160 मी

13. बुलबुल **14.** 24000 रु

15. 24000 रु **16.** नौ

प्रश्नावली 14.2

1. (a) 4 सेमी^{2} (b) 8 सेमी^{2} (c) 40 सेमी^{2}

2. (a) 240 सेमी^{2} (b) 800 सेमी^{2} (c) 204 सेमी^{2} (d) 1245 सेमी^{2}

3. (a) 104 सेमी^{2} (b) 77 सेमी^{2} (c) 51 सेमी^{2} (d) 7500 सेमी^{2} या मी^{2}

4. 17.5 सेमी^{2}

5. (a) 9 सेमी^{2} (b) 121 सेमी^{2} (c) 72.25 सेमी^{2} (d) $\frac{1}{4}$ मी^{2}

6. वर्ग ; 57 सेमी^{2}

7. (i) दुगुना हो जाएगा

(ii) दुगुना हो जाएगा

(iii) चार गुना हो जाएगा

8. (i) चार गुना हो जाएगा

(ii) नौ गुना हो जाएगा

(iii) प्रारंभिक क्षेत्रफल का एक चौथाई हो जाएगा।

9. 144 **10.** 100 **11.** 10000 **12.** 4 सेमी

13. नहीं; नहीं **14.** वर्ग PQRS **15.** वर्ग PQRS